

DOTTORATO DI RICERCA IN MECCANICA DELLE STRUTTURE

SEDI CONSORZIATE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA, PADOVA, ANCONA

DAVIDE BIGONI

LOCALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE E BIFORCAZIONE  
IN PRESENZA DI LEGGI COSTITUTIVE  
ELASTO-PLASTICHE INCREMENTALI:  
APPLICAZIONI A MATERIALI FRAGILI-COESIVI

Dissertazione presentata per il conseguimento del titolo di

Dottore di Ricerca in Meccanica delle Strutture

Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna

Febbraio 1991

*a Michele Capurso*

"In che senso il pensatore ama il suo nemico."  
Mai trattenere o tacere a te stesso qualcosa  
che può essere pensato contro il tuo pensiero!  
Promettilo a te stesso! Ciò rientra nella  
prima rettitudine del pensare. Ogni giorno  
devi anche muovere contro te stesso la tua  
campagna di guerra. Una vittoria e una trincea  
conquistata non sono più faccende tue, ma  
delle verità - ma anche la tua sconfitta  
non è più affar tuo !

Friedrich Nietzsche, Aurora, n.370

## INDICE

## RINGRAZIAMENTI

## 1. INTRODUZIONE

Comportamento dei materiali pressure-sensitive	1
Legame elastoplastico con legge di flusso non associata	3
Materiali fragili-coesivi (materiali a matrice cementizia)	3
La localizzazione della deformazione	5
Criteri locali ed integrali di stabilità ed unicità	7
Sommario	11
Notazione	14

## 2. RICHIAMI DI MECCANICA DEI MEZZI CONTINUI

2.1 Introduzione	21
2.2 Cinematica	21
2.3 Conservazione della massa	28
2.4 Tensione	28
2.5 Equazioni incrementali	30
2.6 Cambiamento di osservatore-indifferenza materiale	31

## 3. LEGGI COSTITUTIVE ELASTOPLASTICHE INCREMENTALI

3.1 Introduzione	35
3.2 Ipotesi fondamentali	37
3.3 Obiettività	41

3.4	Simmetrie del materiale	46
3.5	Condizione di consistenza di Prager	49
3.6	Inversione del legame incrementale	53
3.7	Caricamento monoassiale	55
3.8	Equazioni costitutive incrementali	58
3.9	Proprietà del tensore costitutivo elastoplastico	62
3.10	Superfici di snervamento e leggi di flusso plastico tipiche	68
4. LEGAMI ELASTOPLASTICI INCREMENTALI PER PROBLEMI PIANI DI TENSIONE E DI DEFORMAZIONE		
4.1	Introduzione	75
4.2	Stato piano di tensione	76
4.3	Perdita di definitezza positiva del tensore costitutivo per stati piani di tensione	78
4.4	Stato piano di deformazione	79
4.5	Perdita di definitezza positiva del tensore costitutivo per stati piani di deformazione	81
5. UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA ELASTOPLASTICO INCREMENTALE		
5.1	Introduzione	85
5.2	Il problema elastoplastico incrementale	85
5.3	Unicità della risposta incrementale	87
5.4	Una condizione locale di unicità	92
5.5	Il caso degli stati piani di tensione e di deformazione	96
6. STABILITÀ ELASTOPLASTICA		
6.1	Introduzione	101
6.2	Stabilità elastoplastica	102
6.3	Una condizione necessaria per la stabilità infinitesima	106

6.4 Ellitticità forte per i solidi di confronto	110
6.5 Coincidenza nella perdita di ellitticità forte nei due solidi di confronto	114
6.6 Valutazione esplicita della soglia della perdita di ellitticità forte	117
7. LOCALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE	
7.1 Introduzione	121
7.2 La localizzazione della deformazione	123
7.3 Soluzione esplicita della condizione di localizzazione	137
7.4 Leggi di flusso con componente deviatorica associata	148
7.5 Legge di flusso associata	150
7.6 Stato piano di deformazione e di tensione	152
7.7 Confronti con il criterio della definitezza positiva del tensore costitutivo	157
8. APPLICAZIONI AI MATERIALI FRAGILI COESIVI	
8.1 Introduzione	163
8.2 Comportamento meccanico dei materiali a matrice cementizia	166
8.3 Il modello di Rudnicki e Rice	173
8.4 Descrizione della localizzazione della deformazione nella prova di compressione assialsimmetrica con pressione di confinamento	180
BIBLIOGRAFIA	197
Appendice A.1	215
Appendice A.2	225

## RINGRAZIAMENTI

Il presente lavoro conclude il corso di Dottorato di Ricerca in Meccanica delle Strutture da me svolto, dall' ottobre 1987 all' ottobre 1990, presso l' Istituto di Scienza delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria dell' Università di Bologna e presso il Department of Civil and Environmental Engineering della Duke University, Durham, N.C., USA.

Desidero ringraziare innanzitutto il Professore Angelo Di Tommaso, Direttore dell' Istituto di Scienza delle Costruzioni, ed il Professore Erasmo Viola, Coordinatore del Dottorato di Ricerca, per il loro sostegno e costante incoraggiamento durante questi anni.

Un debito di gratitudine particolare mi lega al Professore Ferdinando Laudiero, che ha saputo guidarmi nello studio e nella ricerca e ha contribuito alla mia formazione culturale ed umana.

Alcuni dei risultati più importanti contenuti nella tesi sono stati il frutto della collaborazione con il Professore Tomasz Hueckel della Duke University e con l' Ing. Daniele Zaccaria, ricercatore presso l' Istituto di Scienza delle Costruzioni dell' Università di Bologna. Desidero ringraziarli di cuore.

Vorrei ringraziare il Professore Antonio Tralli per la disponibilità e la pazienza con cui ha discusso assieme a me i temi centrali della tesi.

È doveroso per me ringraziare i Professori Roberto Nova, del Politecnico di Milano, David Schaeffer, della Duke University e Ioannis Vardoulakis, della University of Minnesota, per le approfondite discussioni sugli argomenti della tesi.

Un sentito ringraziamento va al Dr. Jean Michel Torrenti e all' Ing. El Habib Benaija, del Laboratoire Central des Ponts et Chaussees di Parigi, e all' Ing. Gualtiero Baldi e all' Ing. Raffaele Renzi dell' ISMES di Bergamo, per avermi messo a disposizione risultati sperimentali ed attrezzature che hanno reso possibile parte della tesi.

## Capitolo 1

### INTRODUZIONE

#### - *Comportamento dei materiali "pressure-sensitive"*

Molti materiali non metallici, quali le rocce, le terre, le ceramiche, i mezzi granulari, le murature ed i materiali a matrice cementizia, esibiscono un comportamento meccanico caratterizzato, per carichi a breve termine, dalle seguenti peculiarità:

- comportamento non lineare e inelastico anche per piccoli gradienti di spostamento,
- resistenza a trazione scarsa o nulla,
- comportamento "pressure-sensitive", ovvero aumento della resistenza e della duttilità al diminuire della componente ottaedrica della tensione,
- comportamento inelastico dilatante per stati tensionali deviatorici, mentre per stati di compressione isotropa il materiale esibisce una diminuzione di volume (nella fase iniziale dello sviluppo della deformazione inelastica).

A livello microstrutturale, i comportamenti sopra menzionati derivano dallo sviluppo ed interazione di tre tipi di micromeccanismi: lo scorrimento plastico, la nucleazione e la

crescita dei vuoti e la apertura o chiusura delle microfratture. La presenza dei vuoti spiega infatti il comportamento contraente per stati tensionali isotropi di compressione, mentre le microfratture risultano responsabili della "pressure-sensitivity". Inoltre, nei materiali che contengono aggregati, il flusso plastico è accompagnato da una riorganizzazione strutturale che è all' origine dell' aumento della deformazione volumetrica<sup>1</sup>.

Se interpretata nell' ambito della teoria della plasticità, la "pressure-sensitivity" richiede che le dimensioni della sezione deviatorica della superficie di snervamento aumentino percorrendo l' asse idrostatico nel verso della compressione. Esempi di superfici di questo tipo (che verranno indicate brevemente come "superfici di tipo conico") sono quelle proposte da Drucker e Prager (1952) (criterio di Drucker-Prager), da Drucker (1953) (criterio di Tresca modificato) e da Shield (1955) (criterio di Mohr-Coulomb). Impiegando queste superfici, non risulta peraltro possibile lo sviluppo di deformazione inelastica per stati di compressione isotropa. In Drucker et al. (1957) viene proposto pertanto di impiegare una superficie di snervamento di tipo conico, assieme ad una superficie ("Cap") che ne chiude l' apertura lungo l' asse ottaedrico. Questo modello è stato in seguito generalizzato nella teoria dello "stato critico" (Scofield e Wroth 1968), ove si distingue tra superficie di snervamento e superficie critica. Quest' ultima superficie è di tipo conico e rappresenta il luogo degli stati tensionali corrispondenti al raggiungimento dello stato critico, caratterizzato dal progredire della deformazione in assenza di incrementi di deformazione volumetrica.

---

<sup>1</sup>Si veda, ad esempio il modello proposto da Rowe (1962) per i mezzi granulari.

- Legame elastoplastico con legge di flusso non associata

La legge di flusso plastico individua la direzione della parte plastica della deformazione. Essa è definita associata (alla superficie di snervamento) quando la parte plastica della deformazione risulta proporzionale al gradiente della funzione di snervamento. Nel caso di superfici di snervamento di tipo conico, adottando la legge di flusso associata, la parte plastica della deformazione ha una componente sferica positiva che risulta, in genere, quantitativamente superiore alle osservazioni sperimentali. Un legame elastoplastico non associato, ove la direzione del flusso plastico risulti svincolata dalla direzione della normale alla superficie di snervamento, risulta pertanto necessario per ottenere un riscontro con i risultati sperimentali. Le leggi di flusso plastico non associate, pur non risultando in contrasto con i principi generali della termodinamica (Mandel 1966, Mróz 1963), implicano tuttavia la non validità del postulato della massima dissipazione di Hill (1948) e della condizione di stabilità del materiale di Drucker (1951).

- Materiali fragili-coesivi (materiali a matrice cementizia)

I materiali "fragili-coesivi", che comprendono in particolare i materiali a matrice cementizia, sono caratterizzati, per prove a deformazione controllata, dal raggiungimento di un carico massimo, oltre al quale il materiale esibisce un ramo di "softening" più o meno accentuato<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>In una prova a deformazione controllata nel ramo di "softening" il carico diminuisce al progredire della deformazione. L'inclinazione del ramo di softening risulta fortemente influenzata dalle condizioni di prova. Ad esempio, per prove di compressione monoassiale, l'inclinazione del ramo di softening aumenta al

Questi materiali sono inoltre caratterizzati da un forte degrado elastico conseguente allo sviluppo della deformazione inelastica. Per interpretare questo effetto, Dougill (1976) ed Hueckel (1975, 1976) hanno introdotto il modello elasto(plastico)-fratturante, che è stato in seguito analizzato da Capurso (1979), Dafalias (1977), Hueckel e Maier (1977), Maier e Hueckel (1979), e recentemente applicato ai materiali a matrice cementizia (Chen e Han 1988, § 7).

Accanto al modello elasto(plastico)-fratturante, che rappresenta un modello fenomenico continuo, ne sono stati proposti molti altri, la cui discussione è al di fuori degli intenti di questa presentazione. Tutti questi modelli prevedono, nella situazione di rottura, la formazione di una zona di materiale degradato abbastanza ampia. Per contro, impiegando i modelli della meccanica della frattura, la rottura del materiale avviene solamente in una piccola zona di processo che si propaga attraverso il corpo. Tuttavia è ormai riconosciuto (Bazant e Mazars 1990) che sia i modelli derivati dalla teoria classica della plasticità che dalla meccanica della frattura non risultano esaustivi nella descrizione delle condizioni di crisi delle strutture reali, ove entrambi i fenomeni sono spesso compresenti. Infatti, in genere, il degrado del materiale si evidenzia in porzioni piuttosto ampie dei corpi, per poi concentrarsi in poche zone di estensione limitata. In tali zone il degrado del materiale progredisce rapidamente fino alla comparsa delle fratture. Questo tipo di comportamento è anche osservabile in prove di laboratorio a deformazione controllata. Infatti, oltre certi stati deformativi di soglia, viene osservata la comparsa, all' interno di campi omogenei di deformazione, di una o più zone di deformazione concentrata. Tale fenomeno è noto come localizzazione della

---

crescere del rapporto altezza/base del campione (van Mier 1984); si ottengono inoltre inclinazioni più pronunciate se si rende minimo l' attrito con i piatti della pressa o se si rendono libere le rotazioni in testa al campione (Benajja 1991).

deformazione. Le zone di deformazione concentrata hanno usualmente una forma di banda piana di spessore piccolo<sup>3</sup> rispetto alle dimensioni del campione.

- La localizzazione della deformazione

Prove di compressione monoassiale eseguite al Laboratoire Central des Ponts et Chaussees di Parigi (Benaija 1991) su campioni prismatici di conglomerato cementizio semplice e fibrorinforzato hanno dimostrato che la localizzazione della deformazione precede il raggiungimento del picco della curva tensione-deformazione<sup>4</sup>. Pertanto sia il "softening" che il degrado elastico (che comincia ad essere molto pronunciato solo nel ramo di softening) possono essere considerati come conseguenze della localizzazione della deformazione e quindi essere ritenuti effetti strutturali. La localizzazione della deformazione permette inoltre di interpretare il "size effect", ovvero la variazione di risposta del campione qualora venga cambiata la scala delle dimensioni geometriche. Infatti la banda ha uno spessore indipendente dalle condizioni geometriche e legato alle sole caratteristiche del materiale e viene quindi ad influenzare diversamente la risposta del campione in relazione alle dimensioni di quest' ultimo.

La localizzazione della deformazione risulta sperimentalmente riscontrabile in quasi tutti i materiali di interesse ingegneristico<sup>5</sup> (quando portati in prossimità di stati

---

<sup>3</sup> Gli unici dati sperimentali quantitativi ottenuti con una certa sicurezza riguardano prove su campioni di sabbia, dove lo spessore delle bande risulta dell' ordine di 10/30 volte il diametro medio dei grani (Desrues 1990, Roscoe 1970, Vardoulakis 1980).

<sup>4</sup> Questo risultato è analogo ai risultati delle prove su campioni di sabbie ad alta densità (Desrues 1990).

<sup>5</sup> Nei materiali metallici tale fenomeno corrisponde alla formazione delle bande di Lüder (cfr. Nadai 1931, pp. 86, Hill 1950, pp. 8-11).

deformativi sufficientemente severi) ed avviene, nei materiali a matrice cementizia, in assenza di effetti geometrici instabilizzanti (Benaija 1991). Il fatto che la localizzazione della deformazione sia riscontrabile anche in prove ove siano controllati gli spostamenti su tutto il contorno del campione<sup>6</sup> spinge ad interpretare tale fenomeno come un particolare modo di instabilità del materiale. La localizzazione della deformazione viene interpretata come una perdita di unicità della soluzione del problema elasto(plastico) incrementale secondo un particolare tipo di cinematismo. Questo cinematismo viene prescritto sotto forma di una discontinuità nella velocità di deformazione attraverso una banda delimitata da due superfici piane, all' interno della quale la velocità di deformazione è omogenea. In riferimento ad un percorso fondamentale di equilibrio, corrispondente ad un solido deformato in modo omogeneo, si studia la possibile perdita di unicità, secondo la cinematica prescritta, ad ogni incremento di carico. In tale contesto si prescinde pertanto dal problema al contorno ed il problema della determinazione della soglia di localizzazione viene spostato nell' ambito delle equazioni costitutive. Questo approccio, nel caso delle leggi costitutive elastoplastiche incrementali, è stato sviluppato principalmente da J. R. Rice (Needleman e Rice 1978, Palmer e Rice 1973, Rice 1973, 1976, 1985, Rice e Rudnicki 1980, Rudnicki e Rice 1975) e da I. Vardoulakis (Vardoulakis 1976, 1981, 1988, Vardoulakis et al. 1978) sulla base di concetti dovuti a Hill (1950 pp. 323-325, 1952, 1962), Hill e Hutchinson (1975), Mandel (1966), Prager (1954), Thomas (1961 b). In sintesi, condizione sufficiente per il verificarsi di una biforcazione sotto forma di una banda piana di discontinuità della deformazione è che il tensore costitutivo tangente perda ellitticità. Questa condizione è rappresentata dalla singolarità del tensore acustico corrispondente al tensore

---

<sup>6</sup> Esperimenti di questo tipo sono stati condotti su argille da Vardoulakis (1989) impiegando il "true triaxial apparatus" di Pearce (1972).

costitutivo.

- Criteri locali ed integrali di stabilità ed unicità

Il problema della localizzazione della deformazione rientra, per quanto illustrato, nella problematica generale della stabilità ed unicità della soluzione del problema elastoplastico incrementale. Questo problema è stato affrontato in maniera generale da Hill (1958, 1959, 1961) nel caso della legge di flusso plastico associata. Il passaggio ad una legge di flusso plastico non associata risulta tuttavia non banale ed ancora lontano dall'essere completamente risolto. Raniecki (1979) e Raniecki e Bruhns (1981) hanno formulato la condizione di stabilità nel caso di legge di flusso non associata e hanno introdotto una condizione integrale sufficiente ad escludere la perdita di unicità della soluzione del problema incrementale (criterio di non-biforcazione). Questa condizione integrale è basata sulla introduzione di una famiglia monoparametrica di solidi di confronto che, sostituiti al solido reale, forniscono delle delimitazioni inferiori al valore del moltiplicatore dei carichi corrispondente alla biforcazione.

Sulla base dei criteri integrali di stabilità e di non-biforcazione sono stati formulati diversi criteri *locali* di stabilità ed unicità. In particolare sono stati proposti i seguenti criteri:

- definitezza positiva del tensore costitutivo tangente del solido di confronto di Raniecki (1979),
- ellitticità forte delle equazioni costitutive (Truesdell e Noll, 1965, § 68 bis),
- autovalori reali del tensore acustico (stabilità secondo Mandel 1966),
- ellitticità delle equazioni costitutive (Rice 1976).

Se in tutti i punti di un solido elastoplastico il tensore costitutivo di almeno un solido di confronto di Raniecki è definito positivo, la perdita di unicità della soluzione del problema incrementale risulta esclusa. Raniecki (1979) ha inoltre dimostrato che, nel caso della teoria infinitesima, tale criterio coincide con la richiesta di definitezza positiva del tensore costitutivo del solido reale. Ovvero si dimostra (Raniecki 1979) il seguente principio locale di esclusione<sup>7</sup>, che assume un ruolo centrale nella teoria infinitesima (Hueckel e Maier 1977, Mróz 1963, 1966, Maier e Hueckel 1979, Villaggio 1968):

*Condizione sufficiente ad escludere la perdita di unicità della soluzione del problema incrementale di un solido elastoplastico con legge di flusso non associata e che risulti definito positivo il tensore costitutivo tangente del solido reale in ogni punto del corpo.*

La condizione di ellitticità forte richiede la definitezza positiva del tensore acustico, mentre la disuguaglianza di Hadamard coincide la richiesta della semidefinitezza positiva dello stesso tensore. La disuguaglianza di Hadamard risulta peraltro essere una condizione necessaria per la stabilità infinitesima (Cattaneo 1946, Truesdell e Noll 1965, § 68 bis) di una generica configurazione di un solido elasto(plastico)<sup>8</sup>. Inoltre la perdita di ellitticità forte precede la perdita di ellitticità, che corrisponde alla possibilità della localizzazione della deformazione. La condizione di localizzazione della deformazione rappresenta quindi una forma "estrema" di perdita di stabilità del materiale, essendo infatti preceduta

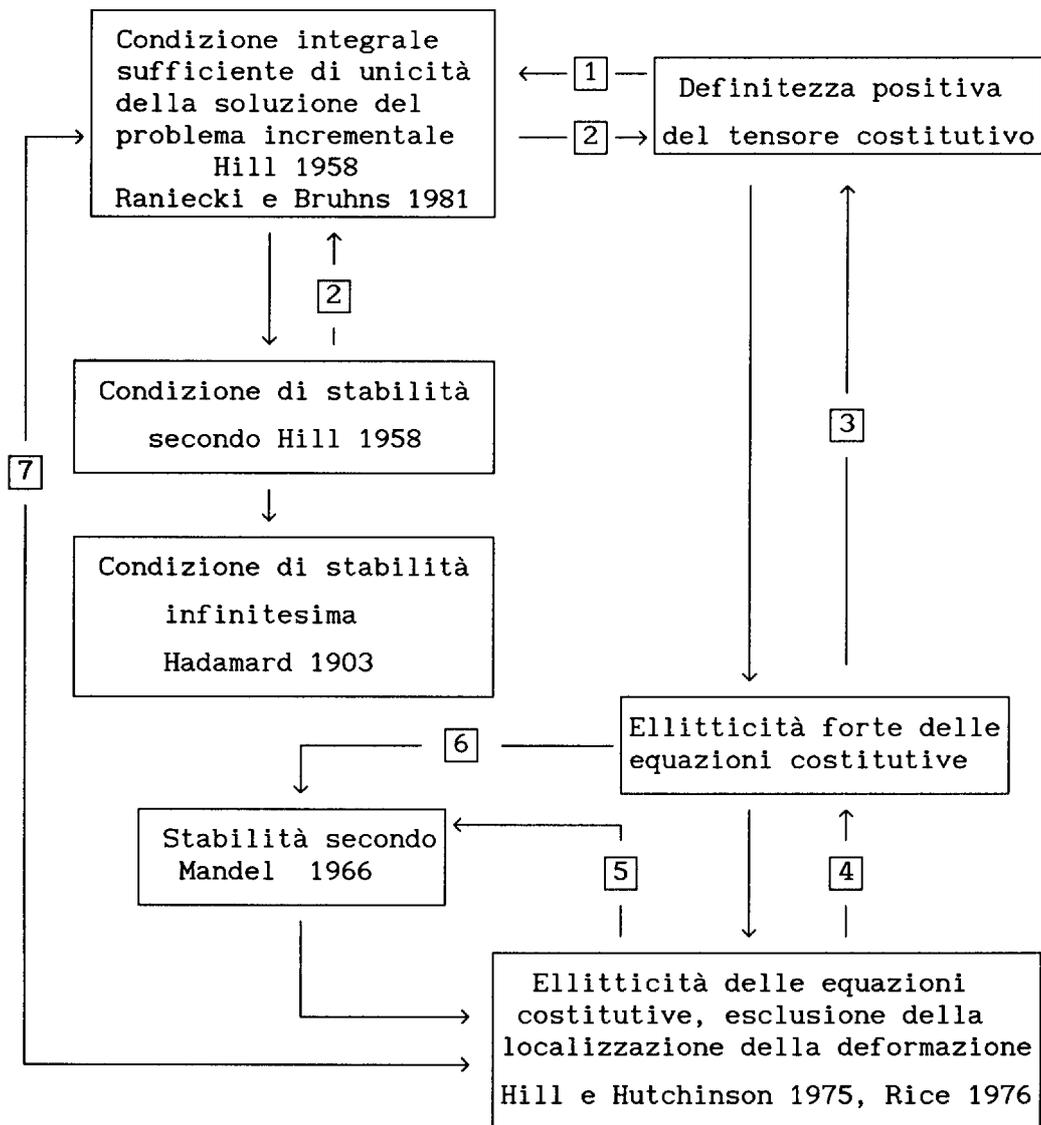
---

<sup>7</sup> Questo criterio locale di esclusione viene indicato come "second order work positiveness criterion" in Bigoni e Hueckel (1989 a, b, 1990 a, b, 1991 a, b) e in Bigoni e Zaccaria (1991).

<sup>8</sup> L' estensione alla plasticità è dovuta a Ryzhak (1987).

dalla perdita di definitezza positiva, e dalla perdita di ellitticità forte del tensore costitutivo. La localizzazione coincide poi con la violazione della condizione integrale di unicità formulata da Hill (1958) nel caso particolare ove risulti applicabile il teorema di van Hove (1947). Le ipotesi di validità del teorema di van Hove sono peraltro piuttosto restrittive; esso risulta infatti applicabile solo nel caso di problemi al contorno ove lo stato deformativo risulti omogeneo, gli spostamenti assegnati su tutto il bordo e la legge di flusso plastico associata (Hill 1962, Rice 1976). La nozione di stabilità secondo Mandel (1966) è fondata sul fenomeno della propagazione delle onde di accelerazione. Infatti, un materiale viene definito stabile quando le onde di accelerazione possono propagarsi in esso con velocità finita. Poiché la localizzazione della deformazione corrisponde ad una onda di accelerazione stazionaria, all'atto della localizzazione il materiale è sempre instabile secondo Mandel. Tale perdita di stabilità può precedere la perdita di ellitticità forte nel caso il tensore acustico ammetta autovalori complessi (An e Schaeffer 1990).

Come è stato sottolineato in Bigoni e Hueckel (1991 a), risulta possibile istituire una precisa gerarchia tra i vari criteri di stabilità ed unicità locali ed integrali. Tale gerarchia, ristretta alla teoria infinitesima, è illustrata nella Fig. 1.1, dove le frecce indicano implicazioni.



- 1 la dimostrazione è dovuta a Raniecki (1979),
- 2 per problemi omogenei con forze assegnate su tutto il contorno
- 3 per problemi piani e deformazione isocorica,
- 4 per plasticità associata,
- 5 per leggi di flusso plastico con componente deviatorica associata (Loret et al. 1990),
- 6 se gli autovalori del tensore acustico sono reali,
- 7 per plasticità associata, deformazione omogenea e condizioni al contorno di tipo cinematico (van Hove 1947).

FIG. 1.1

- Sommario

Nella presente tesi viene studiato il problema della localizzazione della deformazione per solidi (quali, ad es. i materiali a matrice cementizia) ove la localizzazione può avvenire anche in presenza di deformazioni e rotazioni infinitesime. La localizzazione della deformazione è studiata insieme alle condizioni di perdita di definitezza positiva e di perdita di ellitticità forte del tensore costitutivo. Anche se tutti i risultati ottenuti e le applicazioni sono ristrette alla teoria infinitesima<sup>9</sup>, è sembrato opportuno presentare e discutere in dettaglio le condizioni di unicità e stabilità integrali e locali nell'ambito della teoria finita incrementale.

Nel Cap. 2 vengono presentati brevemente alcuni elementi di meccanica del continuo. Lo scopo è quello di richiamare i concetti fondamentali cui si farà riferimento in seguito. Si passa quindi, nel Cap. 3, alla derivazione, tramite la condizione di consistenza di Prager (1949), dei legami costitutivi elastoplastici incrementali, nell'ambito delle grandi rotazioni e deformazioni. La funzione di snervamento e la direzione del flusso plastico (non associato) sono assunte essere funzioni obiettive, continue e regolari delle variabili di stato. Ci si riferisce inoltre a materiali con comportamento in campo elastico isotropo e incrudimento dipendente da un numero finito di parametri scalari. Il legame costitutivo viene infine studiato in dettaglio operando una analisi spettrale del tensore costitutivo incrementale, che presenta alcuni aspetti originali.

Nel Cap. 4 i legami incrementali vengono specializzati ai casi piani di tensione e deformazione. Nel caso della

---

<sup>9</sup>Bigoni e Hueckel (1989 a, b, 1990 a, b, 1991 a, b), Bigoni e Laudiero (1989), Bigoni e Zaccaria (1990, 1991).

deformazione piana viene ricavato il modulo di incrudimento critico corrispondente alla perdita di definitezza positiva del tensore costitutivo. Tale risultato è stato ottenuto da Bigoni e Hueckel (1990 a) nel caso della legge di flusso associata ed in seguito esteso dagli stessi autori alle leggi di flusso non associate (Bigoni e Hueckel 1991 a).

Si passa, nel Cap. 5, ad una presentazione della condizione sufficiente di unicità della soluzione del problema elastoplastico incrementale di Hill (1958) nella forma generalizzata da Raniecki (1979) e Raniecki e Bruhns (1981) per includere la non-associatività del flusso plastico. Viene quindi riportata, in una forma alternativa, la dimostrazione, dovuta originariamente a Raniecki (1979), della coincidenza della perdita di definitezza positiva dell' operatore costitutivo elastoplastico incrementale e dell' operatore costitutivo del solido di Raniecki ottimale. Chiude il capitolo la particolarizzazione, non banale, di tale dimostrazione al caso di deformazione piana.

Nel Cap. 6, vengono studiate le connessioni del criterio locale di stabilità di Hadamard (Truesdell e Noll 1965, § 68 bis) con la stabilità della soluzione del problema incrementale. A tale proposito, per solidi elastoplastici, viene presentata la estensione della dimostrazione di Cattaneo (1946), dovuta a Ryhzak (1987). Successivamente, nell' ambito della teoria infinitesima, la condizione di perdita di ellitticità forte viene espressa in funzione di un valore "critico" del modulo di incrudimento, per i solidi di confronto di Raniecki (1979) e di Hill (1958). Quindi viene mostrata la coincidenza di tali moduli critici e, sulla base di tale coincidenza, viene fornita infine una espressione esplicita per il loro calcolo. Questi risultati sono stati ottenuti nel caso della plasticità con flusso plastico non associato di direzione generica (Bigoni e Zaccaria 1990, 1991).

Nel Cap. 7, dopo una discussione della teoria della localizzazione della deformazione per solidi elastoplastici (Rice 1976), la condizione di localizzazione è ottenuta in forma esplicita in termini di un valore critico del modulo di incrudimento indipendente dalla direzione della normale alla banda. Questo risultato, che permette un calcolo immediato della soglia di localizzazione (cfr. Bigoni e Hueckel 1991 b) è stato conseguito nell'ambito della teoria infinitesima, per plasticità associata (Bigoni e Hueckel 1989 b, 1990), per le leggi di flusso con sola componente deviatorica del flusso plastico associata (Bigoni e Hueckel 1989 a, 1990 b) ed infine per leggi di flusso generali (Bigoni e Hueckel 1991 a). Sono state quindi sviluppate specializzazioni ai casi piani di tensione e deformazione, nel quale contesto è possibile realizzare un confronto sistematico tra le condizioni di localizzazione della deformazione e di perdita di definitività positiva dell'operatore costitutivo (Bigoni e Hueckel 1991 a).

Dopo una descrizione delle caratteristiche principali del comportamento meccanico del conglomerato di cemento, le condizioni di stabilità locale introdotte nei capitoli precedenti vengono applicate, nel Cap. 8, al modello costitutivo proposto da Rudnicki e Rice (1975). Confrontando le previsioni di tale modello con i risultati delle prove condotte da Benaija (1991) al LCPC su campioni prismatici di calcestruzzo in compressione, ci si rende conto che il modello non interpreta coerentemente la localizzazione della deformazione. Impiegando quindi la condizione di localizzazione ottenuta nel precedente capitolo, si discute la possibilità di definire un modello elastoplastico capace di interpretare i risultati sperimentali dell'LCPC. Si dimostra infatti che impiegando una superficie di snervamento chiusa, convessa e di forma opportuna e una legge di flusso plastico non associata, con componente volumetrica positiva o nulla, è possibile ottenere, in compressione monoassiale, la localizzazione della deformazione per valori positivi del modulo di incrudimento.

In questo modo risulta possibile descrivere, almeno qualitativamente, i risultati sperimentali ottenuti al LCPC. Tale possibilità risulta peraltro esclusa nel caso di legge di flusso associata. Tuttavia, per potere formulare un modello elastoplastico completo per la interpretazione della localizzazione della deformazione nei materiali a matrice cementizia, si rende necessaria una ulteriore sperimentazione<sup>10</sup>.

- Notazione<sup>11</sup>

Se  $V$  è lo spazio vettoriale associato allo spazio euclideo di dimensione tre,  $Lin$  indica lo spazio vettoriale delle trasformazioni lineari di  $V$  in sè stesso. Gli elementi di  $Lin$  sono denominati tensori (del secondo ordine). In particolare viene utilizzata la seguente notazione:

$Lin^+$  = l' insieme di tutti i tensori a determinante positivo,  
 $Orth$  = l' insieme di tutti i tensori ortogonali,  
 $Orth^+$  = l' insieme di tutte le rotazioni,  
 $Psym$  = l' insieme dei tensori simmetrici definiti positivi,  
 $Skw$  = il sottospazio di  $Lin$  dei tensori antisimmetrici,  
 $Sym$  = il sottospazio di  $Lin$  dei tensori simmetrici.

Vettori e tensori del secondo ordine vengono indicati con lettere in grassetto, mentre le loro componenti vengono indicate con lettere normali provviste di indici. Quando gli indici sono ripetuti si intendono, salvo indicazione contraria, sommati. I tensori del secondo ordine vengono indicati preferibilmente con

---

<sup>10</sup> Infatti le uniche osservazioni sperimentali disponibili sulla localizzazione della deformazione nei materiali a matrice cementizia sono state ottenute all' LCPC solo per la prova di compressione monoassiale.

<sup>11</sup> Gurtin (1972, § 3-8, 1981, § 1-2), Ogden (1984, § 1).

lettere maiuscole dell' alfabeto romano, mentre i vettori con lettere minuscole. Le lettere dell' alfabeto greco indicano di preferenza scalari o funzioni a valori scalari. Ad esclusione di  $\mathbb{R}$ , che indica l' asse reale, le lettere del tipo  $A, B, C, D, E$  indicano sempre tensori del quarto ordine, ovvero le trasformazioni lineari di  $\text{Lin}$  in sè stesso.

$A$  = tensore acustico corrispondente al tensore  $C$

$\tilde{A}$  = tensore acustico corrispondente al tensore  $\tilde{C}$

$A_e = A^e$  = tensore acustico corrispondente al tensore  $E$

$\tilde{A}_e = \tilde{A}^e$  = tensore acustico corrispondente al tensore  $\tilde{E}$

$A^g = A_g = \tilde{A} - A$

$A^h = A_h$  = tensore acustico corrispondente al tensore  $C^h$

$\tilde{A}^h = \tilde{A}_h$  = tensore acustico corrispondente al tensore  $\tilde{C}^h$

$A^r = A_r$  = tensore acustico corrispondente al tensore  $C^r$

$\tilde{A}^r = \tilde{A}_r$  = tensore acustico corrispondente al tensore  $\tilde{C}^r$

$B = - A_e^{-1} A_g$

$B$  = tensore della deformazione di Cauchy-Green sinistro

$B$  = modulo di elasticità volumetrico

$\mathcal{B}$  = configurazione deformata

$\mathcal{B}$  = configurazione di riferimento (al tempo  $t$ ) nella descrizione lagrangiana relativa

$\mathcal{B}_t$  = regione occupata dal corpo solido all' istante  $t$

$\mathcal{B}_0$  = configurazione di riferimento

$C$  = tensore della deformazione di Cauchy-Green destro

$\mathcal{C}$  = tensore costitutivo elastoplastico nel caso piano di tensione

$\bar{D} \rightarrow \bar{T}$

$\mathcal{C}^h$  = tensore costitutivo del solido di confronto "tipo Hill" nel caso piano di tensione  $\bar{D} \rightarrow \bar{T}$

- $\mathbf{C}$  = tensore costitutivo elastoplastico  $\mathbf{D} \rightarrow \overset{\circ}{\mathbf{K}}$   
 $\tilde{\mathbf{C}}$  = tensore costitutivo elastoplastico  $\mathbf{L} \rightarrow \dot{\mathbf{S}}$   
 $\mathbf{C}^h$  = tensore costitutivo del solido di confronto "tipo Hill"  $\mathbf{D} \rightarrow \overset{\circ}{\mathbf{K}}$   
 $\tilde{\mathbf{C}}^h$  = tensore costitutivo del solido di confronto "tipo Hill"  $\mathbf{L} \rightarrow \dot{\mathbf{S}}$   
 $\mathbf{C}^r$  = tensore costitutivo del generico solido di confronto di Raniecki  $\mathbf{D} \rightarrow \overset{\circ}{\mathbf{K}}$   
 $\tilde{\mathbf{C}}^r$  = tensore costitutivo del generico solido di confronto di Raniecki  $\mathbf{L} \rightarrow \dot{\mathbf{S}}$   
 $\mathbf{C}^{RR}$  = tensore costitutivo introdotto da Rudnicki e Rice (1975)  
 $\mathbf{D}$  = velocità di deformazione  
 $\mathbf{D}^e$  = parte elastica della velocità di deformazione  
 $\mathbf{D}^p$  = parte plastica della velocità di deformazione  
 $\mathbf{D}^w$  = velocità di deformazione critica del tensore  $\mathbf{C}^h$   
 $\mathbf{E}$  = tensore della deformazione infinitesima  
 $E$  = modulo elastico  
 $\mathcal{E}$  = tensore costitutivo elastico nel caso piano di tensione  $\bar{\mathbf{D}} \rightarrow \dot{\bar{\mathbf{T}}}$   
 $\mathbf{E}$  = tensore costitutivo elastico  $\mathbf{D} \rightarrow \overset{\circ}{\mathbf{K}}$   
 $\tilde{\mathbf{E}}$  = tensore costitutivo elastico  $\mathbf{L} \rightarrow \dot{\mathbf{S}}$   
 $\mathcal{E} = (\bar{\mathbf{E}})^{-1}$  = tensore inverso della restrizione a  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)$  di  $\mathbf{E}$   
 $\mathbf{F}$  = gradiente della deformazione  
 $\mathcal{F}$  = traiettoria di un punto  
 $\mathbf{G}$  = tensore di deformazione di Lagrange  
 $G = \mu$  = modulo di elasticità tangenziale  
 $H$  = modulo di incrudimento  
 $H_o = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}]$   
 $H_{cr}^1$  = modulo di incrudimento critico per la localizzazione della deformazione nel solido caratterizzato da  $\mathbf{C}^h$   
 $H_{SE}^h$  = modulo di incrudimento critico per la perdita di ellitticità forte di  $\mathbf{C}^h$   
 $H_{SE}^r$  = modulo di incrudimento critico per la perdita di ellitticità forte di  $\mathbf{C}^r$

$H_{cr}^w$  = modulo di incrudimento critico per la perdita di definitezza positiva di  $C^h$

$I$  = tensore identità

$I_1 = \text{tr}(\mathbf{T})^1$

$\bar{I}_1$  = invarianti che compaiono nella equazione caratteristica di  $\mathbf{T}$

$J$  = determinante jacobiano della deformazione

$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}^d)^2$  = secondo invariante dello sforzo deviatorico

$\mathbf{K}$  = tensore dello sforzo di Kirchhoff

$\mathbf{L}$  = gradiente della velocità

$\mathbf{M} = \mathbb{E}[\mathbf{P}]$

$\mathbf{N} = \mathbb{E}[\mathbf{Q}]$

$\mathbf{N}$  = versore normale all' elemento d' area nella configurazione di riferimento

$\mathbf{0}$  = vettore o tensore nullo

$\mathbf{P}$  = tensore che specifica la direzione del flusso plastico

$\mathcal{P}$  = parte del corpo  $\mathcal{B}$

$\mathbf{Q}$  = gradiente della funzione di snervamento

$\mathbf{Q}$  = tensore rotazione generico

$\mathbf{R}$  = tensore rotazione generico

$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \psi \mathbf{Q}$

$\mathbb{R}$  = insieme dei numeri reali

$\mathbb{R}^+$  = insieme dei numeri reali strettamente positivi

$\mathbb{R}^n$  = spazio euclideo a  $n$  dimensioni

$\mathbf{S}$  = primo tensore di Piola-Kirchhoff

$\mathcal{S}$  = insieme di variabili di stato (scalari, vettori, tensori)

$S(r)$  = intorno sferico di raggio  $r$

$\bar{S}(r)$  = chiusura dell' intorno sferico  $S(r)$

$\mathbf{T}$  = tensore dello sforzo di Cauchy

$T_c$  = valore della tensione massima nella prova di compressione monoassiale

$\mathbf{U}$  = tensore destro di stretch

$\mathbf{V}$  = tensore sinistro di stretch

$\mathbf{W}$  = tensore velocità di rotazione

$\mathbf{X}$  = punto materiale

$\mathbf{a}$  = accelerazione di una particella nella descrizione spaziale

$\mathbf{b}$  = forza per unità di volume nella descrizione spaziale

$\mathbf{b}_0$  = forza per unità di volume nella descrizione materiale

$da$  = elemento d' area nella configurazione  $\mathcal{B}$

$dA$  = elemento d' area nella configurazione  $\mathcal{B}_0$

$\mathbf{e}_1$  = versore corrispondente alla tensione principale  $T_1$  nello spazio di Haigh-Westergaard

$\mathbf{f}$  = forze superficiali agenti sulla parte di contorno  $\partial\mathcal{B}_s$

$\mathbf{f}_0$  = forze superficiali agenti sulla parte di contorno  $\partial\mathcal{B}_{0s}$  per unità di superficie indeformata

$f$  = funzione di snervamento

$\mathbf{g}$  = direzione della velocità nella banda

$q$  = modulo plastico

$q^1$  = modulo plastico corrispondente alla localizzazione della deformazione

$\mathbf{g}$  = tensore metrico

$k_1$  = variabile di stato (scalare)

$\bar{k}_1$  = funzione che definisce la legge di incrudimento corrispondente alla variabile  $k_1$

$\mathbf{n}$  = versore normale alla banda (di localizzazione della deformazione)

$\mathbf{n}$  = versore normale all' elemento d' area nella configurazione deformata

$o(\ )$  = o piccolo di Landau

$\mathbf{s}$  = vettore di tensione nella descrizione spaziale

$\mathbf{s}^*$  = vettore di tensione nominale

$\mathbf{u}$  = vettore spostamento di un punto

$\mathbf{v}$  = velocità spaziale di un punto di  $\mathcal{B}$

$\mathbf{x}$  = punto spaziale

$\Gamma_1$  = autovalore del tensore  $\mathbb{C}^h$

$\gamma$  = piano dello spazio di Haigh-Westergaard che contiene l' asse ottaedrico e un asse principale della tensione

$\delta_{ij}$  = delta di Krönecker

$\partial\mathcal{B}_s$  = contorno di  $\mathcal{B}$  ove sono assegnate le forze

$\partial\mathcal{B}_{os}$  = contorno di  $\mathcal{B}_o$  ove sono assegnate le forze

$\partial\mathcal{B}_v$  = contorno di  $\mathcal{B}$  ove sono assegnati gli spostamenti

$\partial\mathcal{B}_{ov}$  = contorno di  $\mathcal{B}_o$  ove sono assegnati gli spostamenti

$\Delta( )$  = campo differenza

$\zeta$  = distanza del generico piano deviatorico dal punto di sforzo nullo

$\vartheta$  = angolo tra la generica retta del piano deviatorico e la proiezione, sullo stesso piano, di un asse principale di sforzo

$\theta$  = parametro della superficie di snervamento di Ottosen

$\kappa$  = energia cinetica di una parte  $\mathcal{P}$  del corpo

$\kappa$  = energia cinetica del corpo

$\Lambda$  = moltiplicatore plastico

$\lambda$  = modulo di Lamé

$\mu = G$  = modulo di elasticità tangenziale

$\nu$  = coefficiente di Poisson

$\xi = (\text{trP} - \text{trQ})/3$

$\pi$  = nello spazio di Haigh-Westergaard indica il piano deviatorico passante per l' origine

$\rho$  = distanza del punto generico nello spazio di Haigh-Westergaard dall' asse ottaedrico

$\rho$  = densità di massa

$\rho_o$  = densità di massa nella descrizione materiale

$\Sigma$  = secondo tensore di Piola-Kirchhoff

$\Sigma_i$  = sommatoria in  $i$

$\varphi$  = deformazione di  $\mathcal{B}_o$

$\phi$  = moto di  $\mathcal{B}_o$

$\psi$  = parametro che definisce il generico solido di confronto di Raniecki

$\text{Grad} = \nabla$  = gradiente di un campo materiale

$\text{grad}$  = gradiente di un campo spaziale  
 $\text{det}$  = determinante  
 $\text{div}$  = divergenza di un campo spaziale  
 $\text{Div}$  = divergenza di un campo materiale  
 $\text{tr}$  = traccia di un tensore  
 $(\dot{\phantom{x}})$  = derivata materiale  
 $(\overset{\circ}{\phantom{x}})$  = derivata di Jaumann o corotazionale  
 $(\phantom{x})^{-1}$  = tensore inverso  
 $(\phantom{x})^d$  = parte deviatorica di un tensore  
 $(\bar{\phantom{x}})$  = restrizione di una grandezza in  $\mathbb{R}^3$  ad  $\mathbb{R}^2$   
 $||$  = valore assoluto o modulo di un vettore  
 $[[ \ ]]$  = discontinuità di prima specie  
 $\langle \ \rangle$  = parentesi di McAulay  
 $\cdot$  = prodotto scalare  
 $\times$  = prodotto vettoriale  
 $\otimes$  = prodotto diadico  
 $\cup$  = unione  
 $\cap$  = intersezione  
 $\subset$  = inclusione  
 $\in$  = appartenenza  
 $\Leftrightarrow$  = equivalenza  
 $\Rightarrow$  = implicazione  
 $\forall$  = quantificatore universale  
 $\exists$  = quantificatore esistenziale  
 $\blacksquare$  = simbolo di Halmos

## Capitolo 2

### RICHIAMI DI MECCANICA DEI MEZZI CONTINUI

#### 2.1 INTRODUZIONE

Vengono richiamati in questo capitolo alcuni elementi di meccanica dei solidi deformabili che verranno specificatamente utilizzati in seguito. Per una trattazione esauriente si rimanda a Chadwick (1976), Gurtin (1981), Malvern (1969), Ogden (1984), Truesdell e Noll (1965).

#### 2.2 CINEMATICA

Un corpo continuo è identificato con l'insieme aperto  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ . L'insieme aperto  $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^3$  rappresenta la *configurazione di riferimento*, i cui punti, detti *punti materiali* vengono indicati con  $\mathbf{X}$ . Una *deformazione* è una applicazione  $\varphi : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua, iniettiva e sufficientemente regolare:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}). \quad (2.1)$$

I punti  $\mathbf{x}$  di  $\mathcal{B} = \varphi(\mathcal{B}_0)$  vengono detti *punti spaziali*. La condizione di invertibilità locale della deformazione assicura che durante il moto non avvengano lacerazioni o compenetrazioni nella materia. Essa si esprime richiedendo la non singolarità del determinante jacobiano  $J$  di  $\mathbf{x}$ :

$$J = \det \nabla \varphi(\mathbf{X}) \neq 0. \quad (2.2)$$

Si noti che, quando il solido è nella configurazione di riferimento, si ha  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ , quindi  $\nabla \varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$ . Pertanto, la continuità della deformazione, richiede:

$$J > 0. \quad (2.3)$$

Si consideri un generico vettore elementare  $d\mathbf{X}$ . A seguito della deformazione, il vettore  $d\mathbf{X}$  si trasforma nel vettore  $d\mathbf{x}$ , come descritto dalla:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (2.4)$$

ove il tensore  $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$ , *gradiente della deformazione*, è espresso dalla:

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi(\mathbf{X}). \quad (2.5)$$

Un generico elemento di area nella configurazione di riferimento è definito dai due vettori elementari  $d\mathbf{X}$  e  $d\mathbf{Y}$ , mediante il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{N} dA = d\mathbf{X} \times d\mathbf{Y}, \quad (2.6)$$

ove  $\mathbf{N}$  è il versore normale all'elemento d'area  $dA$ . Impiegando la (4) e ricordando la seguente proprietà del prodotto vettoriale (valida solo per vettori in  $\mathbb{R}^3$ ):

$$(\mathbf{A} \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \mathbf{b}) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Lin}, \quad (2.7)$$

dove  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  sono vettori, si ottiene:

$$\mathbf{N} dA = (\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}) \times (\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{y}) = J^{-1} \mathbf{F}^T(d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}) = J^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{n} da, \quad (2.8)$$

dove  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{y}$  sono i vettori elementari e da l' elemento d' area di normale  $\mathbf{n}$  nella configurazione deformata. La (8) rappresenta la legge di trasformazione dell' elemento di area in seguito alla deformazione (relazione di Nanson).

Il tensore gradiente della deformazione può essere rappresentato nel modo seguente (mediante il teorema di decomposizione polare):

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}, \quad (2.9)$$

ove:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \in \text{Psym} \quad \text{tensore destro di stretch}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T} \in \text{Psym} \quad \text{tensore sinistro di stretch}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{R} \in \text{Orth}^+ \quad \text{tensore rotazione}. \quad (2.12)$$

I tensori della deformazione di Cauchy-Green destro  $\mathbf{C} \in \text{Psym}$  e sinistro  $\mathbf{B} \in \text{Psym}$ , sono definiti dalle relazioni:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (2.14)$$

Il quadrato del modulo del vettore  $d\mathbf{x}$  definito nella (4), risulta:

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}. \quad (2.15)$$

Un moto durante il quale resta invariata la distanza tra ogni punto del corpo si definisce *rigido*. Nel caso del moto rigido il tensore destro di Cauchy-Green, così come i tensori  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ , si riduce al tensore identità.

Definendo il vettore spostamento come:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad (2.16)$$

e calcolando il gradiente del campo vettoriale spostamento definito dalla (16), si ottiene la relazione:

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}. \quad (2.17)$$

Dalla (17), impiegando le (13-14), si ricava:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + 2 \mathbf{E} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + 2 \mathbf{E} + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}^T, \quad (2.19)$$

nelle quali è stato introdotto il tensore deformazione infinitesima  $\mathbf{E} \in \text{Sym}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.20)$$

Il tensore di deformazione di Lagrange (o di Green)  $\mathbf{G} \in \text{Lin}$  viene definito come:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (2.21)$$

esso risulta nullo per una qualsiasi deformazione rigida. Impiegando la (18), si ottiene:

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}. \quad (2.22)$$

Si definisce *moto* di  $\mathcal{B}_0$  la applicazione (continua, iniettiva e sufficientemente regolare) che associa ad ogni valore del parametro scalare tempo una configurazione deformata  $\mathcal{B}_t$  di  $\mathcal{B}_0$ :

$$\phi : \mathcal{B}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (2.23)$$

La *posizione* occupata dal punto materiale  $\mathbf{X}$  al tempo  $t$  risulta quindi:

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t), \quad (2.24)$$

mentre la *traiettoria* è definita da:

$$\mathcal{F} = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.25)$$

Ad ogni istante  $t$ , è possibile invertire la (24) e risalire quindi alla posizione del generico punto materiale, assegnata la posizione del corrispondente punto spaziale:

$$\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.26)$$

Enti fisici rappresentati da campi scalari, vettoriali o tensoriali possono essere definiti rispetto alla configurazione di riferimento o nella generica configurazione deformata. Nel primo caso i campi vengono detti *materiali* o *lagrangiani* nel secondo caso *spaziali* o *euleriani*. È evidente che attraverso la (24) o la (26) è sempre possibile trasformare una descrizione lagrangiana in una euleriana o viceversa.

Si definisce *velocità* della particella  $\mathbf{X}$  la variazione rispetto al tempo della sua posizione:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad (2.27)$$

e passando ad una descrizione *spaziale*:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \quad (2.28)$$

La *accelerazione*, definita dalla:

$$\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.29)$$

in una descrizione spaziale risulta:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{x}}(\phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \quad (2.30)$$

Sia  $\Theta$  un campo scalare, vettoriale o tensoriale; si definisce *derivata materiale*  $\dot{\Theta}$  di  $\Theta$  la:

$$\dot{\Theta}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Theta(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad (2.31)$$

che, nella descrizione spaziale, diventa:

$$\dot{\Theta}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \left[ \text{grad } \Theta(\mathbf{x}, t) \right] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (2.32)$$

Il *gradiente della velocità* (spaziale) è definito come:

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}, \quad (2.33)$$

la cui parte simmetrica è la *velocità di deformazione*:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2, \quad (2.34)$$

e la cui parte antisimmetrica è il tensore *velocità di rotazione* ("spin tensor" o "vorticity"):

$$\mathbf{W} = (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)/2. \quad (2.35)$$

È possibile dimostrare che durante un moto rigido, ad ogni istante di tempo  $t$  il campo velocità spaziale ammette la rappresentazione:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}. \quad (2.36)$$

Si consideri ora un campo di velocità generico  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Applicando la formula di Taylor arrestata al termine lineare e ricordando la (33), si ottiene:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{y}) + \mathbf{L}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.37)$$

dove  $o(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow 0$  se  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ . Impiegando le (34 - 35):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{y}) + \mathbf{W}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{D}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + o(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.38)$$

dalla (38), per confronto con la (36), si deduce che *in un intorno di un dato punto  $\mathbf{y}$ , un generico campo di velocità è rappresentabile, con un errore  $o(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , come somma di una velocità di moto rigido e di una velocità ottenuta con la trasformazione lineare:*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.39)$$

Infine vengono riportate alcune identità notevoli che verranno impiegate nel seguito, dove  $\Phi$  e  $\mathbf{u}$  indicano rispettivamente un qualunque campo scalare e vettoriale:

$$\nabla \Phi = \mathbf{F}^T \text{grad } \Phi, \quad (2.40)$$

$$\nabla \mathbf{u} = (\text{grad } \mathbf{u}) \mathbf{F}, \quad (2.41)$$

poichè  $\mathbf{X}$  e  $t$  sono variabili indipendenti, le derivate parziali tra  $\mathbf{X}$  e  $t$  commutano e quindi dalla (41), per  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  si ottiene:

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}. \quad (2.42)$$

### 2.3 CONSERVAZIONE DELLA MASSA

La *massa* è definita come l' integrale del campo *densità*  $\rho$  definito ad ogni istante su  $\mathcal{B}$ .  $\rho_0$  indica il campo densità nella configurazione di riferimento  $\mathcal{B}_0$ .

La massa di una parte  $\mathcal{P}$  qualunque di  $\mathcal{B}$  è quindi:

$$m(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \rho, \quad (3.1)$$

Con riferimento ad un moto arbitrario, la densità risulta funzione del posto e del tempo e vale la seguente identità (*conservazione locale della massa*):

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.2)$$

### 2.4 TENSIONE

Il seguente teorema è noto come *teorema di Cauchy*. Assegnato il moto di un corpo, soggetto a forze di contatto tra parti distinte del corpo stesso (esercitate attraverso la superficie comune) e a forze esercitate dall' ambiente

esterno sul contorno e sul volume del corpo, condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni di bilancio del momento lineare e angolare siano verificate è che esista un campo tensoriale spaziale  $\mathbf{T} \in \text{Sym}$ , tale che:

$$\mathbf{s}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n}, \quad (4.1)$$

ove  $\mathbf{s}(\mathbf{n})$  è la forza che agisce sull' elemento (unitario) di superficie di normale  $\mathbf{n}$ .  $\mathbf{T}$  è detto  *tensore dello sforzo di Cauchy o tensore vero o euleriano dello sforzo*. Esso soddisfa alla  *equazione del moto*, nella descrizione spaziale:

$$\text{div } \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (4.2)$$

dove  $\mathbf{b}$  è la forza per unità di volume.

Si indica con  $\mathbf{s}^*(\mathbf{N}, \mathbf{X})$  il vettore tensione riferito alla unità di superficie nella configurazione di riferimento (*vettore di tensione nominale*). Impiegando la formula di Nanson (2.8), si ottiene:

$$\mathbf{s}^*(\mathbf{N}, \mathbf{X}) dA = \mathbf{s}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) da = \mathbf{T}\mathbf{n} da = J \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA. \quad (4.3)$$

Il  *primo tensore di Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{S} \in \text{Lin}$  (trasposto del  *tensore nominale dello sforzo*) viene definito come:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}, \quad (4.4)$$

Tenendo conto della (4), la (3) si riscrive come (si noti la analogia con la (1)):

$$\mathbf{s}^*(\mathbf{N}, \mathbf{X}) dA = \mathbf{S}\mathbf{N} dA. \quad (4.5)$$

Il tensore  $\mathbf{S}$  soddisfa ad una equazione differenziale analoga

alla (2), ma nel riferimento materiale:

$$\text{Div } \mathbf{S} + \mathbf{b}_o = \rho_o \ddot{\mathbf{x}}. \quad (4.6)$$

Il *secondo tensore di Piola-Kirchhoff*  $\Sigma \in \text{Sym}$ , riferito alla configurazione di riferimento, è definito come:

$$\Sigma = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}. \quad (4.7)$$

L'equazione differenziale di equilibrio in termini di  $\Sigma$  assume la forma:

$$\text{Div } [\Sigma \mathbf{F}^T] + \mathbf{b}_o = \rho_o \ddot{\mathbf{x}}. \quad (4.8)$$

Una misura dello sforzo, utile negli sviluppi seguenti, è definita attraverso il *tensore dello sforzo di Kirchhoff o di Trefftz*  $\mathbf{K} \in \text{Sym}$ :

$$\mathbf{K} = J \mathbf{T} = \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (4.9)$$

## 2.5 EQUAZIONI INCREMENTALI

L'equazione incrementale del moto, in funzione del primo tensore di Piola-Kirchhoff, si ottiene eseguendo la derivata materiale della (4.6):

$$\text{Div } \dot{\mathbf{S}} + \dot{\mathbf{b}}_o = \rho_o \dot{\ddot{\mathbf{x}}}, \quad (5.1)$$

che, trascurando la variazione delle forze d'inerzia (moti quasi-statici), diventa:

$$\text{Div } \dot{\mathbf{S}} + \dot{\mathbf{b}}_o = 0. \quad (5.2)$$

La relazione tra la derivata materiale del vettore nominale di tensione e la derivata materiale del primo tensore di Piola-Kirchhoff si scrive nella forma:

$$\dot{\mathbf{s}}^*(\mathbf{N}, \mathbf{X}) = \dot{\mathbf{S}}\mathbf{N}, \quad (5.3)$$

mentre, derivando materialmente la (4.4) e tenendo presente che  $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{J} \operatorname{div} \mathbf{v}$  e  $\dot{\mathbf{F}}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{L}$ , si ha:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{J} ( \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{T}\mathbf{L}^T ) \mathbf{F}^{-T}. \quad (5.4)$$

Derivando materialmente la relazione tra i tensori di Cauchy e di Kirchhoff (4.9), si ha:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{J} ( \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{v} ), \quad (5.5)$$

e quindi, sostituendo la (5.5) nella (5.4):

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{K}}\mathbf{F}^{-T} - \mathbf{J} \mathbf{T}\mathbf{L}^T\mathbf{F}^{-T}. \quad (5.6)$$

Le (4-6) esprimono i legami tra i tensori incrementali dello sforzo.

## 2.6 CAMBIAMENTO DI OSSERVATORE. INDIFFERENZA MATERIALE

Due descrizioni  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{x}^*$  dello stesso moto, compiute da due osservatori in *moto relativo* sono legate dalla relazione:

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{X}, t) = \mathbf{q}(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{o}], \quad (6.1)$$

ove  $\mathbf{o}$  è l'origine del sistema di riferimento di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{q}(t)$  è il punto in cui l'osservatore  $\mathbf{x}^*$  vede l'origine del

sistema di riferimento di  $\mathbf{x}$ . Il tensore rotazione  $\mathbf{Q}$  rappresenta la rotazione tra gli assi dei due sistemi di riferimento al tempo  $t$ .

Un vettore  $\mathbf{v}$  e un tensore (del secondo ordine)  $\mathbf{S}$  sono detti *indifferenti* se si trasformano, con un cambiamento di osservatore, nel modo seguente:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{Q}\mathbf{v}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{Q} \mathbf{S} \mathbf{Q}^T, \quad (6.3)$$

ove  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$ .

Di seguito vengono riportate le leggi di trasformazione per un cambiamento dell'osservatore delle grandezze meccaniche introdotte nei paragrafi precedenti (cfr. Gurtin 1981, § VII):

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{v}^* = \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)[\mathbf{x} - \mathbf{o}] + \mathbf{Q}\mathbf{v}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{W}^* = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{Q}^T, \quad (6.7)$$

dove  $\mathbf{Q}$  rappresenta un tensore rotazione. Si nota che la velocità di deformazione è indifferente, mentre non lo sono le altre grandezze.

Il principio di indifferenza materiale stabilisce che *due osservatori in moto relativo devono osservare la stessa tensione in un corpo allo stesso istante*. Quindi deve essere:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T, \quad (6.8)$$

È importante notare che, pur essendo lo sforzo di Cauchy (e quindi anche  $\mathbf{K}$ ) indifferente rispetto alle rotazioni del sistema di riferimento, tale non risulta la sua derivata materiale, infatti:

$$\dot{\mathbf{T}}^* = \frac{\dot{\mathbf{T}}}{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{T}} \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{T} \dot{\mathbf{Q}}^T, \quad (6.9)$$

ricavato  $\dot{\mathbf{Q}}$  dalla (7) in funzione di  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{W}^*$ , la (9) diventa:

$$\dot{\mathbf{T}}^* - \mathbf{W}^* \mathbf{T}^* + \mathbf{T}^* \mathbf{W}^* = \mathbf{Q} (\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{W}) \mathbf{Q}^T, \quad (6.10)$$

quindi non l' incremento di sforzo, ma la quantità:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{W}, \quad (6.11)$$

risulta indifferente. Il tensore  $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$  definisce una particolare derivata del tensore dello sforzo, detta di *Jaumann* (*corotazionale* o *di corpo rigido*).

È noto che possono costruirsi infinite misure dell' incremento dello sforzo che siano indifferenti come la (11). Ad esempio, nel caso della derivata *convected* (o di Oldroyd), si aggiungono al termine destro della (11) i due termini indifferenti  $(\mathbf{D} \mathbf{T})$  e  $(\mathbf{T} \mathbf{D})$ . Nella formulazione delle leggi costitutive si farà peraltro riferimento alla derivata di Jaumann.

In analogia alla (11), la derivata di Jaumann dello sforzo di Kirchhoff risulta:

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{W} \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{W}. \quad (6.12)$$

Sostituendo la (11) nella (5.4) si ottiene:

$$\dot{\mathbf{S}} = J (\overset{\circ}{\mathbf{T}} + \mathbf{W} \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{W} + \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{T} \mathbf{L}^T) \mathbf{F}^{-T}, \quad (6.13)$$

mentre, sostituendo la (12) nella (5.6), si ha:

$$\dot{\mathbf{S}} = (\overset{\circ}{\mathbf{K}} + \mathbf{W} \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{W}) \mathbf{F}^{-T} - J \mathbf{T} \mathbf{L}^T \mathbf{F}^{-T}, \quad (6.14)$$

che esprime la relazione tra la derivata materiale dello sforzo di Piola-Kirchhoff e la derivata di Jaumann dello sforzo di Kirchhoff.

## LEGGI COSTITUTIVE ELASTOPLASTICHE INCREMENTALI

### 3.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo vengono introdotte e discusse le equazioni costitutive incrementali per solidi elastoplastici con legge di flusso non associata. La non-associatività del legame elastoplastico è stata introdotta negli anni '60 da Mandel (1966) e da Mróz (1963, 1966), anche se la distinzione, nella formulazione costitutiva elastoplastica, tra potenziale plastico e superficie di snervamento è comunque precedente e può essere fatta risalire almeno a Hill (1950). La motivazione principale a sostegno della introduzione dei legami non associati deriva da alcune osservazioni sperimentali. Infatti, i materiali il cui limite elastico dipende dalla componente ottaedrica dello sforzo, esibiscono in generale un comportamento che presenta analogie con il problema delle interfacce con attrito alla Coulomb (Drucker 1954, Mandel 1966). In particolare si osserva una dilatanza sensibilmente inferiore rispetto a quella prevista adottando il legame associato. Rientrano in questa classe i materiali geologici (terre e rocce), i materiali a matrice cementizia, le ceramiche, i mezzi granulari, i materiali compositi a matrice metallica ed anche i metalli in genere se deformati fino in prossimità della localizzazione (Rice 1976, cfr. § 7).

Negli ultimi trenta anni è apparso nella letteratura tecnica un numero elevato di lavori in cui vengono studiate ed impiegate leggi di flusso non associate, sia nell' ambito del calcolo a rottura (de Josselin de Jong 1964, Palmer 1966, Radenkovich 1961, Sacchi e Save 1968, Salençon 1972, 1983) che nell' ambito della analisi incrementale (Capurso 1979, Maier 1970, Needleman 1979, Nemat-Nasser 1983, Nemat-Nasser e Shokoh 1980, Rice 1976, Rice e Rudnicki 1980, Rudnicki e Rice 1975, Raniecki and Bruhns 1981). Pur tuttavia, non risulta pubblicato, a tutt' oggi, alcuno studio che presenti un quadro completo in merito alle leggi costitutive elastoplastiche in presenza di non-associatività del legame ed, in particolare, senza restrizioni sulla entità di deformazioni e rotazioni.

Nel presente capitolo si sviluppa una formulazione delle leggi costitutive elastoplastiche incrementali sotto l' ipotesi che l' incrudimento dipenda da un numero finito di parametri scalari. Questa formulazione può considerarsi la estensione al caso delle deformazioni finite dell' approccio proposto da Prager (1949). Inoltre, vengono descritte le caratteristiche principali del legame incrementale. Una impostazione assiomatica più rigorosa di quella proposta, limitata alla sola plasticità associata con deformazione plastica volumetrica nulla, è stata sviluppata da Lucchesi e Podio Guidugli (1988, 1990). Per quanto riguarda la plasticità con legge di flusso associata si è fatto riferimento ai seguenti lavori: Hill (1950, 1958), Kachanov (1971), Koiter (1960), Martin (1975), Olszak, Mróz e Perzyna (1963), Salençon (1977, 1983). Per quanto concerne la plasticità con legge di flusso non associata si è fatto riferimento principalmente ai seguenti lavori: Baker e Desai (1984), Darve (1990 a, b), Derski et al. (1989), Hueckel e Maier (1977), Loret (1990), Maier (1970), Maier e Hueckel (1979), Mandel (1966), Mróz (1963, 1966), Neale (1981),

Needleman (1979), Nemat-Nasser (1983), Prevost (1987), Rudnicki e Rice (1975), Rice (1976), Rice e Rudnicki (1980), Raniecki (1979), Raniecki e Bruhns (1981).

### 3.2 IPOTESI FONDAMENTALI

Si considerano solidi elastoplastici i cui legami costitutivi risultano definiti puntualmente assumendo:

#### 1. *Legame incrementale tensione-deformazione*

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}} = \mathbb{E} [\mathbf{D} - \mathbf{D}^P], \quad (2.1)$$

dove  $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$  rappresenta la derivata di Jaumann dello sforzo di Kirchhoff,  $\mathbf{D}^P$  è la parte plastica della velocità di deformazione  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbb{E}$  è il tensore costitutivo elastico incrementale, al quale si richiede la definitezza positiva e l'isotropia (in altre parole  $\mathbb{E}$  è una mappa lineare isotropa  $\text{Sym} \rightarrow \text{Sym}$ , definita positiva). Adottando la (1) si è implicitamente ammessa la possibilità della decomposizione additiva della velocità di deformazione:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^P, \quad (2.2)$$

dove  $\mathbf{D}^e$  e  $\mathbf{D}^P$  sono le componenti elastica e plastica della velocità di deformazione  $\mathbf{D}$ .

#### 2. *Funzione di snervamento*

$$f(\mathbf{T}, \mathbf{k}_i) = 0, \quad (2.3)$$

dove  $\mathbf{T}$  rappresenta il tensore dello sforzo di Cauchy e  $\mathbf{k}_i$  è

un elemento dell' insieme di variabili di stato scalari, che governano l' incrudimento. Si assume che la funzione scalare  $f$  sia continua nelle variabili di stato  $T$  e  $k_i$  e che descriva, nello spazio dello sforzo, una superficie liscia. La (3) definisce il *dominio elastico* del corpo: fino a che lo stato tensionale in un punto è tale da soddisfare la disuguaglianza  $f(T, k_i) < 0$ , sono esclusi incrementi di deformazione plastica. Il comportamento elastico del materiale è ristretto al caso isotropo, quindi la funzione di snervamento è rappresentabile, senza perdita di generalità, nello spazio delle tensioni principali (spazio di *Haigh-Westergaard*), dove appare come una superficie (*superficie di snervamento*). Si ammette inoltre che la superficie di snervamento possieda le seguenti caratteristiche:

- *Convessità della funzione  $f$  nello spazio delle tensioni:*

$$\left( \forall \alpha \in [0, 1], \forall T^{(1)}, T^{(2)} \in \text{Sym} \right) \\ f[\alpha T^{(1)} + (1-\alpha)T^{(2)}] \leq \alpha f(T^{(1)}) + (1-\alpha)f(T^{(2)}). \quad (2.4)$$

- *Appartenenza del punto di sforzo nullo al dominio elastico:*

$$f(T=0, k_i) \leq 0. \quad (2.5)$$

Dal punto di vista fisico, l' ipotesi (5) assicura che a partire da qualunque stato è sempre possibile uno scarico tensionale completo in un qualunque punto del materiale senza sviluppo di deformazioni plastiche<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Indicando con  $Q$  il gradiente della funzione di snervamento, le ipotesi (4) e (5) assicurano che:

$$(\forall T : f(T, k_i) = 0) \quad T \cdot Q \geq 0 \quad \text{e} \quad T^d \cdot Q^d \geq 0,$$

dove il gradiente  $Q$  è calcolato in  $T$  e l'apice  $d$  indica la parte deviatorica dei tensori  $T$  e  $Q$ .

### 3. Legge di flusso plastico

$$\mathbf{D}^P = \Lambda \mathbf{P}, \quad \Lambda \geq 0, \quad (2.6)$$

dove  $\mathbf{P}$  è il tensore simmetrico del secondo ordine che individua la direzione del flusso plastico. Si assume che esso sia una funzione continua delle variabili di stato (tensore dello sforzo e parametri  $k_i$ ). Lo scalare  $\Lambda$  è il moltiplicatore plastico, positivo quando si sviluppa la deformazione plastica, altrimenti nullo.

### 4. Legge di incrudimento

$$\dot{\bar{k}}_i = \Lambda \bar{k}_i, \quad (2.7)$$

dove  $\bar{k}_i$  è una funzione continua delle variabili di stato.

#### Osservazioni

- i.) Il tipo di incrudimento considerato, più generale di una semplice espansione omotetica della superficie di snervamento, verrà indicato brevemente con il nome di "incrudimento isotropo"<sup>2</sup>.
- ii.) Leggi di incrudimento più generali di quella considerata, richiedono che la superficie di snervamento risulti una funzione continua di un insieme di variabili di stato comprendente anche vettori ("vector directors",

---

<sup>2</sup>Usualmente, in letteratura, si indica con incrudimento isotropo una espansione omotetica della superficie di snervamento. Tuttavia, nel caso più generale di superficie di snervamento dipendente da un numero finito di parametri rientrano, ad esempio, i modelli a due parametri proposti da Mróz e Norris (1982), Nemat-Nasser (1982) e Prevost e Höeg (1975).

Mandel 1972) e/o tensori del secondo ordine (incrudimento cinematico) o di ordine superiore (Fardshisheh e Onat 1972).

- iii.) La legge di flusso plastico viene usualmente dedotta introducendo una *funzione potenziale plastico*. Il tensore  $\mathbf{P}$  viene definito in questo caso come il gradiente di tale funzione.
- iv.) Quando  $\mathbf{P}$  coincide con il gradiente alla superficie di snervamento, la (6) rappresenta la legge di flusso associata (nel caso di superficie di snervamento liscia). Il legame elastoplastico (6) risulta quindi una generalizzazione di quello associato.
- v.) L' ipotesi della convessità della superficie di snervamento (4) può essere sostituita con la ipotesi più debole (e di ovvio significato fisico) che la superficie di snervamento sia una *stella di centro  $\mathbf{T}=\mathbf{0}$*  (Hill 1950, pp. 17, Salençon 1983, § 1)<sup>3</sup>:

$$(\forall \mathbf{T}, \forall \alpha \in [0, 1]) \quad f(\mathbf{T}, \mathbf{k}_i) \leq 0 \Rightarrow f(\alpha\mathbf{T}, \mathbf{k}) \leq 0. \quad (2.8)$$

Infatti, nella trattazione seguente non si farà mai uso esplicito delle condizioni (4) e (5), che sono utilizzate solo attraverso la relazione (8) che ne consegue. La maggioranza delle superfici di snervamento proposte in letteratura risultano comunque essere convesse<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>Se  $f$  è una stella di centro  $\mathbf{T}=\mathbf{0}$ , detto  $\mathbf{Q}$  il gradiente alla superficie di snervamento, vale:

$$(\forall \mathbf{T}, f(\mathbf{T}, \mathbf{k}_i)=0) \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \geq 0,$$

dove  $\mathbf{Q}$  è calcolato in  $\mathbf{T}$ .

<sup>4</sup>Nel caso dei metalli, Hill (1968, II, pp.318) afferma "...

### 3.3 OBIETTIVITÀ

Il principio di indifferenza materiale restringe le possibili dipendenze funzionali di  $f$  dalle variabili  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{k}_1$ . In particolare:

$$\left( \forall \mathbf{T}, \mathbf{k}_1, \forall \mathbf{R} \in \text{Orth}^+ \right) f(\mathbf{T}, \mathbf{k}_1) = 0 \Rightarrow f(\mathbf{RTR}^T, \mathbf{k}_1) = 0. \quad (3.1)$$

La funzione  $f$  deve essere quindi una funzione isotropa della tensione e quindi la dipendenza dallo sforzo avviene solo attraverso gli invarianti<sup>5</sup> (cfr. Gurtin 1981, § 37):

all experiments show that yield surfaces are at any rate convex in Cauchy stress space. ..."

<sup>5</sup> Il teorema di rappresentazione delle funzioni isotrope  $\Phi : \mathcal{A} (\subset \text{Sym}) \rightarrow \mathbb{R}$  può essere enunciato come segue (Gurtin 1981, § 37, Ogden 1984, pp. 190-192):

$$\begin{aligned} & (\forall \mathbf{A} \in \mathcal{A} (\subset \text{Sym}), \mathbf{Q} \in \text{Orth}) \quad \Phi(\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T) = \Phi(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \exists \hat{\Phi}(\text{tr} \mathbf{A}, \text{tr} \mathbf{A}^2, \text{tr} \mathbf{A}^3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \right) \hat{\Phi}(\text{tr} \mathbf{A}, \text{tr} \mathbf{A}^2, \text{tr} \mathbf{A}^3) = \Phi(\mathbf{A}) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \exists \tilde{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \right) \left\{ \begin{aligned} & \tilde{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Phi(\mathbf{A}) \text{ e} \\ & \text{e } \tilde{\Phi}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \tilde{\Phi}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1) = \tilde{\Phi}(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2) \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

dove  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sono gli autovalori di  $\mathbf{A}$ . Gli invarianti definiti usualmente (cfr. Gurtin 1981, Sect. 2) sono i coefficienti dell'equazione caratteristica di  $\mathbf{T}$ , equazione soddisfatta, per il teorema di Cayley-Hamilton, dallo stesso  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T}^3 - \bar{I}_1 \mathbf{T}^2 + \bar{I}_2 \mathbf{T} - \bar{I}_3 \mathbf{I} = 0. \quad (\text{N.1})$$

Gli invarianti nella (N.1) risultano legati a quelli (2-4) dalle relazioni (cfr. Ogden 1984, pp. 25):

$$\bar{I}_1 = I_1, \quad \bar{I}_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - I_2), \quad \bar{I}_3 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} I_1^3 - \frac{3}{2} I_1 I_2 + I_3 \right).$$

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{T} , \quad (3.2)$$

$$I_2 = \text{tr } \mathbf{T}^2 , \quad (3.3)$$

$$I_3 = \text{tr } \mathbf{T}^3 . \quad (3.4)$$

Il gradiente  $\mathbf{Q}$  ( $\in \text{Sym}$ ) della funzione di snervamento:

$$\mathbf{Q} = \partial f / \partial \mathbf{T} , \quad (3.5)$$

può quindi essere posto nella forma:

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial f}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial f}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{T}} . \quad (3.5)$$

Utilizzando le derivate degli invarianti (2-4):

$$\partial I_1 / \partial \mathbf{T} = \mathbf{I}, \quad \partial I_2 / \partial \mathbf{T} = 2\mathbf{T}, \quad \partial I_3 / \partial \mathbf{T} = 3\mathbf{T}^2, \quad (3.6)$$

la (5) diventa:

$$\mathbf{Q} = (\partial f / \partial I_1) \mathbf{I} + (\partial f / \partial I_2) 2\mathbf{T} + (\partial f / \partial I_3) 3\mathbf{T}^2 . \quad (3.7)$$

Dalla (7) discende che la condizione di incrudimento dipendente da un numero finito di parametri, assieme alla condizione di obiettività, impone la *coassialità*<sup>6</sup> del gradiente della funzione di snervamento al tensore dello sforzo. Da un punto di vista geometrico, la condizione di coassialità (7) implica che il tensore gradiente della funzione di plasticizzazione possa essere rappresentato da un

---

<sup>6</sup>Due tensori simmetrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono coassiali se e solo se commutano (cfr. Ogden 1984, pp. 28), ovvero se e solo se  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ . In tal caso i due tensori possiedono almeno tre autovettori in comune.

vettore nello spazio di Haigh-Westergaard.

Analogamente alla funzione scalare  $f$ , anche il tensore  $P$  (funzione a valori tensoriali di  $T$  e  $k_i$ ) introdotto con la (2.6) deve soddisfare la condizione di obiettività:

$$(\forall T, \forall R \in \text{Orth}^+) \quad RP(T, k_i)R^T = P(RTR^T, k_i). \quad (3.8)$$

Il teorema di rappresentazione delle funzioni tensoriali isotrope di una variabile tensoriale (cfr. Gurtin 1981, § 37) impone che la funzione  $P$  ammetta una rappresentazione del tipo:

$$P = a I + b T + c T^2, \quad (3.9)$$

dove  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono tre funzioni scalari isotrope delle variabili di stato ( $T$  e  $k_i$ ).

Discende dalla (9) che anche il tensore  $P$  è coassiale al tensore dello sforzo.

*Avendo assunto l'incrudimento dipendente da un numero finito di variabili scalari, la condizione di obiettività impone la coassialità dei tre tensori  $P$ ,  $Q$ ,  $T$ .*

#### *Osservazioni*

- i.) Qualora sia introdotta una superficie potenziale plastico, la rappresentazione (9) è formalmente coincidente con la (7), ove, in luogo della funzione di snervamento  $f$ , compare la funzione potenziale plastico.
- ii.) Nella teoria classica della plasticità sviluppata per i materiali metallici (Hill 1950, pp. 15-23) si assume che lo snervamento sia indipendente dalla componente ottaedrica

della tensione. Questa ipotesi implica che la superficie di snervamento non sia più funzione del primo invariante dello sforzo e che dipenda solo dal secondo e terzo invariante dello sforzo deviatorico. Inoltre, escludendo l'effetto Bauschinger (il comportamento rimane inalterato cambiando il segno alla tensione), la funzione di snervamento deve risultare una funzione pari del terzo invariante dello sforzo (perchè il segno del terzo invariante cambia cambiando segno allo sforzo).

- *iii.*) È possibile includere nella trattazione l'incrudimento cinematico dipendente da un tensore del secondo ordine  $\mathbf{A}$ . La rappresentazione della funzione  $f$  coinvolge in questo caso anche gli invarianti  $a_1$  del tensore  $\mathbf{A}$  e gli invarianti misti  $m_1$  (di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{T}$ ) (Rivlin ed Ericksen 1955, Wang 1969 a)<sup>7</sup>:

$$a_1 = \text{tr } \mathbf{A}, \quad a_2 = \text{tr } \mathbf{A}^2, \quad a_3 = \text{tr } \mathbf{A}^3, \quad (3.10)$$

$$m_1 = \text{tr}(\mathbf{TA}), \quad m_2 = \text{tr}(\mathbf{TA}^2),$$

$$m_3 = \text{tr}(\mathbf{T}^2\mathbf{A}), \quad m_4 = \text{tr}(\mathbf{T}^2\mathbf{A}^2). \quad (3.11)$$

Analogamente, in luogo della (9), si scrive (Rivlin ed Ericksen 1955, Wang 1970 a, b, 1971):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = & a \mathbf{I} + b \mathbf{T} + c \mathbf{T}^2 + d \mathbf{A} + e \mathbf{A}^2 + f (\mathbf{TA} + \mathbf{AT}) + \\ & g (\mathbf{T}^2\mathbf{A} + \mathbf{AT}^2) + h (\mathbf{A}^2\mathbf{T} + \mathbf{TA}^2) + i (\mathbf{T}^2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^2\mathbf{T}^2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

ove  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$  sono funzioni scalari

---

<sup>7</sup> La dimostrazione di Rivlin ed Ericksen (1955) non è valida (cfr. Truesdell e Noll 1965, § 10-13) nel caso entrambi i tensori  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{T}$  abbiano un autospazio degenere. In questo caso il teorema di rappresentazione è stato dimostrato da Wang (1969 a, b).

isotrope di  $\mathbf{T}$  ed  $\mathbf{A}$ .

- iv.) È interessante esaminare il caso generico in cui un tensore del secondo ordine  $\mathbf{B}$  possiede un autospazio degenere. Nel piano corrispondente all' autospazio degenere tutte le direzioni risultano principali. Un tensore  $\mathbf{C}$  coassiale al tensore  $\mathbf{B}$  non presenta necessariamente un autospazio degenere. Ad esempio, dalle rappresentazioni (7) e (9), si deduce (le frecce indicano implicazioni):

$$\mathbf{T} = (T_i - T_k) \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_i + T_k \mathbf{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{Q} = (Q_i - Q_k) \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_i + Q_k \mathbf{I}, \mathbf{P} = (P_i - P_k) \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i + P_k \mathbf{I}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{Q} = (Q_i - Q_k) \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_i + Q_k \mathbf{I} \begin{cases} T_k = T_j \\ T_k = -T_j - (2\partial f / \partial I_2) / (3\partial f / \partial I_3) \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{P} = (P_i - P_k) \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i + P_k \mathbf{I} \begin{cases} T_k = T_j \\ T_k = -T_j - b/c \end{cases} \quad (3.15)$$

dove  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{q}_i$  e  $\mathbf{t}_i$  sono gli autovettori di modulo unitario nello autospazio non degenere di  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{T}$  i cui autovalori sono indicati con  $P_i$ ,  $P_j$ ,  $P_k$ ,  $Q_i$ ,  $Q_j$ ,  $Q_k$  e  $T_i$ ,  $T_j$ ,  $T_k$  rispettivamente<sup>8</sup>.

*Se il gradiente della funzione di snervamento e la*

<sup>8</sup>La (13) può essere dedotta ricordando che  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$  sono funzioni isotrope di  $\mathbf{T}$  e applicando il "teorema di trasferimento" (Gurtin 1981, pp. 231).

*direzione del flusso plastico non dipendono da  $T^2$ , le (13)-(15) si riducono alle seguenti equivalenze:*

$$T_i = T_j \Leftrightarrow P_i = P_j \Leftrightarrow Q_i = Q_j, \quad (3.16)$$

dove gli indici indicano gli autovalori di  $P$  e  $Q$ .

Nel caso  $P=Q + \xi I$ , la (16) è sempre verificata se la superficie di snervamento è indipendente dal terzo invariante dello sforzo. Questa condizione è soddisfatta, ad esempio, dalle superfici di Huber-von Mises, Drucker-Prager (1952), Roscoe-Burland (1968), Bresler-Pister (1958). La (16) non risulta invece verificata a priori nel caso, ad esempio, della superficie di snervamento proposta da Ottosen (1977).

### 3.4 SIMMETRIE DEL MATERIALE

Il tipo di simmetrie che esibisce il materiale è determinato dalla classe di operazioni (rotazioni e riflessioni) che ne lasciano inalterata la risposta. Avendo assunto isotropo il comportamento elastico del materiale, il livello di isotropia dipende dalla funzione di snervamento e dal tensore  $P$ . La superficie di snervamento e il tensore  $P$  possiedono una *simmetria rispetto alla trasformazione  $R \in \text{Orth}$*  se:

$$f(T, S) = f(T, R[S]), \quad RP(T, S)R^T = P(T, R[S]) \quad (4.1)$$

ove  $S$  indica l'insieme delle variabili di stato e la operazione  $R[S]$  indica la appropriata trasformazione sulle variabili di  $S$ . Se  $S$  è costituito da un insieme finito di parametri scalari, le (1) risultano soddisfatte da qualunque tensore  $R$  del gruppo ortogonale ed il materiale risulta *isotropo*. Se tra le variabili di stato figura un tensore del

secondo ordine  $\mathbf{A}$ , una condizione sufficiente per le (1) risulta<sup>9</sup>:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}. \quad (4.2)$$

La (2) è soddisfatta da ogni rotazione  $\mathbf{R}$  se e solo se  $\mathbf{A}$  è sferico. Se lo spazio caratteristico di  $\mathbf{A}$  è formato da un piano e una retta (i.e.  $\mathbf{A}$  ha due autovalori uguali) la (2) risulta soddisfatta da tutte le rotazioni attorno alla retta ed il piano definisce un piano di isotropia. Infine, se la (2) è soddisfatta quando  $\mathbf{R}$  è una riflessione, il materiale ha *tre assi* (lo spazio caratteristico di  $\mathbf{A}$ ) *principali di anisotropia* ed è detto *ortotropo*.

Nel caso di materiale isotropo, come già ricordato, la superficie di snervamento può essere rappresentata nello spazio di Haigh-Westergaard (Hill 1950, pp. 15-23). La sua forma può essere individuata dalla sua sezione sul piano deviatorico (o piano  $\pi$ ) e dalle sezioni meridiane. Il piano  $\pi$  ha equazione:

$$\text{tr } \mathbf{T} = 0, \quad (4.3)$$

ed il versore normale a questo piano individua l' *asse ottaedrico* (o *idrostatico*), definito da:

---

<sup>9</sup>Per verificare che la (2) è una condizione sufficiente per la (1)<sub>2</sub> basta ricordare che la funzione tensoriale  $\mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{S})$  deve essere isotropa rispetto alle rotazioni simultanee di  $\mathbf{T}$  ed  $\mathbf{S}$ , ovvero deve risultare:

$$(\forall \mathbf{R} \in \text{Orth}) \mathbf{R} \mathbf{P} \mathbf{R}^T = \mathbf{P}(\mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^T, \mathbf{R} \mathbf{S}),$$

che rende evidente la sufficienza della (2) per la (1)<sub>2</sub>.

$$\mathbf{n} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) / \sqrt{3}, \quad (4.4)$$

dove i vettori  $\mathbf{e}_i$  rappresentano i versori degli assi del sistema principale di tensione. Assegnato un generico vettore dello spazio di Haigh-Westergaard, la sua proiezione sul piano  $\pi$  rappresenta il corrispondente sforzo deviatorico. Ad ogni vettore  $\mathbf{m}$  appartenente al piano  $\pi$ , cioè tale che  $\sum_i m_i = 0$ , corrisponde un piano meridiano, ovvero il piano del fascio di sostegno l'asse ottaedrico normale ad  $\mathbf{m}$ . La assunzione di isotropia restringe peraltro la forma della sezione della superficie di snervamento sul piano  $\pi$ . Infatti, se il vettore  $\{T_1, T_2, T_3\}^T$  definisce un punto tensione sulla superficie di snervamento, tutti i vettori ottenuti permutando le componenti del vettore di partenza rappresentano altrettanti punti tensione sulla superficie di snervamento. Quindi la sezione della superficie di snervamento con il piano  $\pi$  deve avere almeno tre assi di simmetria, che sono le proiezioni dei tre assi principali di tensione su  $\pi$ <sup>10</sup>. La sezione deviatorica risulta quindi completamente specificata quando sia assegnato l'arco di curva (che sottende un angolo di 60°) compreso tra le proiezioni di due assi principali di tensione. L'equazione di questo arco di curva, nel piano  $\pi$ , può essere espressa attraverso le coordinate polari  $\rho$  e  $\vartheta$ , che sono legate agli invarianti di sforzo dalle relazioni:

$$\rho = \sqrt{(T_1^d)^2 + (T_2^d)^2 + (T_3^d)^2} = \sqrt{2 J_2}, \quad (4.5)$$

---

<sup>10</sup> Nel caso il materiale presenti lo stesso comportamento invertendo il segno allo sforzo (come usualmente si assume nel caso dei metalli), la sezione deviatorica deve risultare simmetrica anche rispetto alle bisettrici delle tre proiezioni degli assi principali di tensione (Hill 1950, pp. 18).

$$\vartheta = \frac{1}{3} \arccos \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right], \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3} \quad (4.6)$$

dove  $T^d$  è lo sforzo deviatorico e  $\vartheta$ <sup>11</sup> è l'angolo tra  $\rho$  e la proiezione sul piano deviatorico di un qualunque asse principale assunto come asse di riferimento. Se la superficie di snervamento risulta indipendente da  $\vartheta$  (i.e. se è una superficie di rotazione), può essere rappresentata in maniera univoca tramite la sezione deviatorica ed una sezione meridiana. Infine, per la descrizione geometrica delle superfici di snervamento nello spazio di Haigh-Westergaard, risulta utile introdurre il parametro  $\zeta$  che rappresenta la distanza del piano deviatorico che contiene il punto tensione  $T$  dal punto di sforzo nullo:

$$\zeta = \frac{\text{tr}T}{\sqrt{3}}. \quad (4.7)$$

### 3.5 CONDIZIONE DI CONSISTENZA DI PRAGER

In questo paragrafo vengono derivate le equazioni costitutive incrementali per solidi elastoplastici con legge di flusso non associata, senza restrizioni sull'entità delle deformazioni e delle rotazioni. Il tipo di approccio seguito è stato usato, per la prima volta, (nell'ambito della teoria infinitesima) da Prevost (1987).

La condizione di consistenza di Prager (1949) richiede

---

<sup>11</sup>Le (5) e (6) sono facilmente ottenibili con considerazioni geometriche. Una deduzione semplice si può trovare in Chen e Han (1988, pp. 66-70).

ad un punto tensione sulla superficie di snervamento (nello spazio dello sforzo e delle variabili di stato) di restare su tale superficie a seguito di un generico incremento di deformazione plastica. Per scrivere tale condizione, la funzione di snervamento viene espressa in funzione dello sforzo di Kirchhoff<sup>12</sup>  $\mathbf{K}$ , nella forma seguente:

$$\Lambda > 0 \Rightarrow \dot{f}(\mathbf{K}, k_i) = 0. \quad (5.1)$$

La superficie di snervamento nello spazio dello sforzo di Kirchhoff deve godere peraltro delle stesse proprietà geometriche di cui gode nello spazio dello sforzo di Cauchy<sup>13</sup>. Nel seguito ci si riferirà sempre alla descrizione Lagrangiana relativa, ove  $\det \mathbf{F} = 1$  e quindi  $\mathbf{K} = \mathbf{T}$ . Esplicitando la (1) si ottiene:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{K}} \cdot \dot{\mathbf{K}} + \frac{\partial f}{\partial k_i} \dot{k}_i = 0, \quad (5.2)$$

dove  $k_i$  indica la generica variabile di stato e l'indice si intende sommato. Posto  $\partial f / \partial \mathbf{K} = \mathbf{Q}$ , impiegando la legge di incrudimento (2.7) e ricordando la relazione tra derivata materiale e derivata di Jaumann (cfr. § 2.6), la (2) diventa:

<sup>12</sup> La funzione di snervamento è stata espressa in funzione dello sforzo di Kirchhoff fino dalle prime generalizzazioni della teoria infinitesima ad opera di Budianski (si veda Neale 1981) e di Hutchinson (1973). Una motivazione a sostegno di tale scelta è che, nel caso della legge di flusso associata, si ottiene un tensore costitutivo elastoplastico simmetrico, che può quindi essere derivato da una funzione potenziale.

<sup>13</sup> Si noti che nel caso delle superfici di snervamento di Huber-von Mises e di Drucker-Prager, il passaggio dallo spazio dello sforzo di Cauchy a quello di Kirchhoff consiste in una espansione o contrazione omotetica della superficie di snervamento.

$$\overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \mathbf{K} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K} \mathbf{W} + \left[ \frac{\partial f}{\partial k_i} \bar{k}_i \right] \Lambda = 0 . \quad (5.3)$$

Si definisce modulo di incrudimento lo scalare in parentesi nella (3) cambiato di segno:

$$H = - \left[ \frac{\partial f}{\partial k_i} \bar{k}_i \right] . \quad (5.4)$$

Impiegando la definizione (4) e osservando che:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \mathbf{K} = - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K} \mathbf{W} , \quad (5.5)$$

la (3) si riscrive come:

$$\overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{K} + 2 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \mathbf{K} = \Lambda H . \quad (5.6)$$

Tenendo presente la rappresentazione del tensore  $\mathbf{Q}$  analoga alla (3.7), ma sviluppata rispetto al tensore  $\mathbf{K}$ , si deduce che:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \mathbf{K} = 0 . \quad (5.7)$$

Infatti, ricordando che  $\mathbf{K}$  è simmetrico,  $\mathbf{W}$  antisimmetrico e osservando quindi che  $\mathbf{K}^i \cdot \mathbf{W} = 0$ , risulta:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{W} \mathbf{K} = \text{tr } \mathbf{W} \mathbf{K} = 0 , \quad (5.8)$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{W} \mathbf{K} = \mathbf{K}^2 \cdot \mathbf{W} = 0 , \quad (5.9)$$

$$\mathbf{K}^2 \cdot \mathbf{W} \mathbf{K} = \mathbf{K}^3 \cdot \mathbf{W} = 0 . \quad (5.10)$$

Tramite la (7), la condizione di consistenza (6) diviene:

$$\overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{K}} = \Lambda \mathbf{H} , \quad (5.11)$$

dove compaiono solo grandezze obiettive. Sostituendo il legame costitutivo (2.1) ed impiegando la legge di flusso plastico (2.6), si ottiene il valore del moltiplicatore plastico:

$$\Lambda = \left\langle \frac{\overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}]}{\overset{\circ}{H}_0 + H} \right\rangle , \quad (5.12)$$

dove il simbolo  $\langle \cdot \rangle$  indica le parentesi di McAulay<sup>14</sup>, e dove:

$$\overset{\circ}{H}_0 = \overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}]. \quad (5.13)$$

Per la validità della (12) lo scalare  $\overset{\circ}{H}_0 + H$ , detto *modulo plastico* ed in seguito indicato con il simbolo  $q$ , deve essere ovviamente diverso da zero.

Sostituendo la legge di flusso plastico (2.6) nella legge costitutiva (2.1) e tenendo conto della espressione (12) del moltiplicatore plastico, si ottiene il seguente legame incrementale:

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}} = \mathbf{E}[\mathbf{D}] - \left\langle \frac{\overset{\circ}{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}]}{q} \right\rangle \mathbf{E}[\mathbf{P}] , \quad (5.14)$$

La relazione (14) rappresenta il legame elastoplastico incrementale. Quando il termine tra le parentesi di McAulay è negativo il legame si riduce ad un legame elastico (*condizione di scarico elastico*). Quando il termine tra le parentesi di McAulay è nullo il legame si riduce ancora al legame elastico, ma il punto tensione (nello spazio dello sforzo di Kirchhoff) si muove tangenzialmente alla superficie

---

<sup>14</sup> Le parentesi di McAulay indicano l'operatore  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ + \{0\}$  :  
 $\langle \alpha \rangle = (|\alpha| + \alpha)/2$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

di snervamento (*condizione di carico neutro*). Infine, quando il contenuto delle parentesi di McAulay è positivo, la parte plastica della velocità di deformazione è non nulla (*condizione di carico plastico*).

### 3.6 INVERSIONE DEL LEGAME INCREMENTALE

Si supponga ora  $q > 0$ . In tal caso il legame (5.14) può essere invertito se  $H > 0$ . Infatti, se si considera la condizione di carico plastico:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}] > 0, \quad (6.1)$$

e si esegue il prodotto scalare della (5.14) con il tensore  $\mathbf{Q}$ , (tenendo conto della definizione (5.13) di  $H_0$ ) si ottiene:

$$\mathbf{Q} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{K}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}] \left[ \frac{H}{H_0 + H} \right]. \quad (6.2)$$

Pertanto, per la assunzione fatta circa la positività del modulo plastico  $q = H + H_0$ , la condizione di carico plastico (1) si può esprimere alternativamente come:

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{Q} > 0. \quad (6.3)$$

Usando il tensore inverso del tensore elastico, la (5.14) può ora scriversi nella forma seguente:

$$\mathbf{E}^{-1}[\overset{\circ}{\mathbf{K}}] = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}]}{H_0 + H} \mathbf{P}, \quad (6.4)$$

ed infine, ricavando  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}]$  dalla (2) e sostituendo nella (4), si ottiene il legame inverso:

$$D = \mathbb{E}^{-1} [\overset{\circ}{K}] + \frac{1}{H} \langle \overset{\circ}{Q} \cdot \overset{\circ}{K} \rangle P, \quad (6.5)$$

dove è stata introdotta la condizione di carico/scarico (3).

Da ora in poi ci si riferirà ad un materiale il cui comportamento elastico è definito da una trasformazione lineare isotropa definita su Sym, a valori in Sym. Il tensore  $\mathbb{E}$  assume quindi la forma (si veda, Finzi e Pastori 1961, pp. 94, Gurtin 1972, § 22):

$$\mathbb{E} = \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + 2 \mu \mathbb{I}, \quad (6.6)$$

dove gli scalari  $\lambda$  e  $\mu$  indicano le costanti di Lamè<sup>15</sup> e  $\mathbb{I}$  rappresenta il tensore identità del quarto ordine<sup>16</sup>.

Il legame elastico inverso è definito da:

$$\mathbb{E}^{-1} = \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3B} - \frac{1}{2G} \right) \right] \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \frac{1}{2G} \mathbb{I}, \quad (6.7)$$

dove G e B sono, rispettivamente, i moduli di elasticità tangenziale e volumetrico.

<sup>15</sup> Per comodità di lettura si riportano alcune relazioni tra le costanti di Lamè ed il modulo di elasticità E, il modulo di elasticità tangenziale G, il modulo di elasticità volumetrico B ed il coefficiente di Poisson  $\nu$  che verranno in seguito largamente impiegate:

$$\nu = \lambda / [2(\lambda + \mu)], \quad E = \mu(3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu), \quad G = \mu = E / [2(1 + \nu)]$$

$$B = \lambda + 2\mu/3, \quad \lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)], \quad \lambda / (\lambda + 2\mu) = \nu / (1 - \nu)$$

<sup>16</sup> Nei casi in cui  $\mathbb{E}$  viene applicato al gradiente della velocità, si intende che esso resta applicato alla sola parte simmetrica del gradiente stesso. Ovvero con  $\mathbb{E}[L]$  si indica, brevemente,  $\frac{1}{2} \mathbb{E}[L + L^T]$ ; ciò equivale, se si preferisce, ad introdurre  $\mathbb{E}$  come una mappa  $\text{Lin} \rightarrow \text{Sym}$ , lineare, isotropa, definita positiva:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda (\text{tr}X) \mathbb{I} + \mu (X + X^T), \quad \forall X \in \text{Lin}.$$

Impiegando la (6), si ottiene:

$$E[X] = \lambda (\text{tr}X) I + 2\mu X, \quad \forall X \in \text{Sym}, \quad (6.8)$$

dalla quale è possibile dedurre:

$$Q \cdot E[D] = \lambda \text{tr}Q \text{tr}D + 2\mu Q \cdot D, \quad (6.9)$$

$$H_o = P \cdot E[Q] = \lambda \text{tr}P \text{tr}Q + 2\mu P \cdot Q. \quad (6.10)$$

### 3.7 CARICAMENTO MONOASSIALE

Si immagini ora di sottoporre ad uno stato di sforzo monoassiale <sup>17</sup> un elemento di materiale caratterizzato da una equazione costitutiva elastoplastica incrementale come quella proposta. Il campo tensionale, nel riferimento principale, si riduce alle tre componenti  $[K_1, 0, 0]$ . L' incremento nella componente di sforzo  $K_1$  risulta, dalla (5.14):

$$\dot{K}_1 = 2\lambda \left[ 1 - (\lambda \text{tr}P + 2\mu P_1) \frac{\text{tr}Q}{H_o + H} \right] D_2 + \left[ (\lambda + 2\mu) - \frac{\lambda \text{tr}Q + 2\mu Q}{H_o + H} (\lambda \text{tr}P + 2\mu P_1) \right] D_1. \quad (7.1)$$

Il legame tra  $D_2$  e  $D_1$  si ricava imponendo  $\dot{K}_3 = \dot{K}_2 = 0$  nella (5.14), ottenendo:

---

<sup>17</sup> Si osservi che l' usuale prova di trazione (o compressione) su un campione cilindrico consente solo un controllo sulla risultante dello sforzo e sugli spostamenti della superficie. E' pertanto opportuno riferirsi ad una prova ideale che può tradursi in una prova reale solo accettando una ipotesi a priori sullo stato di sforzo. Nel caso del materiale rigido-plastico tale ipotesi viene fatta risalire ad Haar-von Karman (Haythornthwaite 1960).

$$D_2 = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}Q-1) \left[ \lambda + \mu - \frac{\lambda \text{tr}Q + 2\mu Q}{H_0 + H} \right]^{-1} D_1, \quad (7.2)$$

Il legame inverso (6.5), valido solo per  $H > 0$ , fornisce:

$$D_1 = \left[ \left( \frac{1}{9B} + \frac{1}{3G} \right) + \frac{1}{H} P_1 Q_1 \right] \dot{K}_1. \quad (7.3)$$

Il termine entro parentesi quadra nella (3) rappresenta l'inverso della tangente alla curva che esprime l'andamento di  $K_1 = \int_0^t \dot{K} dt$  in funzione della corrispondente componente di deformazione logaritmica<sup>18</sup>  $D_1^1 = \int_0^t D_1 dt$ . Il contributo della plasticità è responsabile (al diminuire di  $H$ ) di una progressiva diminuzione di rigidità, che tende a zero per  $H \rightarrow 0$ .

Quando  $H$  è positivo si parla di *incrudimento positivo* (la curva monoassiale è strettamente crescente). Quando  $H = 0$ , il legame inverso (6.5) non è più definibile (resta ovviamente il legame diretto (5.14), in cui  $H=0$ ). È questo il caso della *plasticità perfetta* (la curva monoassiale presenta un tratto piatto). Infine, nel caso in cui  $H < 0$ , si parla di *incrudimento negativo* (o *softening*) e ovviamente l'unico legame incrementale definibile è quello diretto (8).

- *Incrudimento critico (snap-back) e sub-critico*

Fino a questo punto non è stato detto nulla circa il segno del modulo plastico  $H_0 + H$  nella (5.14). Vi sono peraltro delle evidenze sperimentali<sup>19</sup> che dimostrano che la curva ottenuta da una prova di compressione semplice

<sup>18</sup> Per la definizione di deformazione logaritmica si veda Malvern 1969, pp. 150-152.

<sup>19</sup> Si veda, ad esempio, Wawersik e Fairhurst (1970), Hardy, Hudson e Fairhurst (1973).

presenta, per materiali di tipo lapideo, un ramo ad incrudimento negativo tanto pronunciato da diventare verticale (*incrudimento critico o punto di snap-back*) e, addirittura, subverticale (*incrudimento subcritico*). Se si sostituisce la (2) nella (1) e si esegue il limite per  $q = H_0 + H \rightarrow 0$ , si ricava  $\dot{K}_1/D_1 \rightarrow -\infty$ ; quindi la condizione  $q = 0$  corrisponde al raggiungimento del punto di snap-back. Il valore di  $H$  corrispondente a  $H_0 + H = 0$  è detto comunemente valore "critico"<sup>20</sup> mentre valori di  $H$  tali che  $H_0 + H < 0$  si dicono sub-critici.

*In sintesi:*

$H = +\infty$	$\rightarrow$ legame elastico,
$H > 0$	$\rightarrow$ incrudimento positivo (hardening),
$H = 0$	$\rightarrow$ plasticità perfetta,
$-H_0 < H < 0$	$\rightarrow$ incrudimento negativo (softening),
$H = -H_0$	$\rightarrow$ incrudimento critico (snap-back),
$H < -H_0$	$\rightarrow$ incrudimento sub-critico.

*Il modello elastoplastico incrementale presentato viene limitato a valori del modulo plastico positivi, restando così escluso lo snap-back ed il comportamento sub-critico.*

Il problema della estensione del modello elastoplastico incrementale al comportamento critico e sub-critico risulta ancora lontano dall'essere risolto. In

---

<sup>20</sup>La denominazione sembra inappropriata e può generare confusione. In seguito verranno definiti "critici" valori del modulo plastico corrispondenti a diversi tipi di instabilità del materiale. Il modulo di incrudimento critico sopra definito verrà quindi sempre indicato come modulo di snap-back.

particolare appare evidente che il valore di snap-back rappresenta una soglia di instabilità estrema del materiale (detta *intrinseca*) il cui superamento impone ripensamenti teorici e sperimentali. Per una discussione del problema dell'incrudimento critico e sub-critico si rimanda ai lavori di Casey e Lin (1986), Dafalias e Hermann (1982), Maier e Hueckel (1979).

### 3.8 EQUAZIONI COSTITUTIVE INCREMENTALI

Il legame incrementale, che deriva dalle ipotesi costitutive definite nel § 3.2, risulta dunque nella forma:

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}} = \mathbb{C}[\mathbf{D}], \quad (8.1)$$

dove il tensore costitutivo elastoplastico  $\mathbb{C}$  vale:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^h = \mathbb{E} - \frac{1}{H_0 + H} \mathbb{E}[\mathbf{P}] \otimes \mathbb{E}[\mathbf{Q}], \quad (8.2)$$

nel caso di carico plastico  $(\mathbf{Q} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{D}] > 0)$  e:

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}, \quad (8.3)$$

nel caso di scarico elastico o carico neutro  $(\mathbf{Q} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{D}] \leq 0)$ .

È stata ammessa inoltre la validità delle seguenti ipotesi:

- il tensore  $\mathbb{E}$  rappresenta una trasformazione lineare isotropa definita positiva di Sym in Sym.
- $\mathbf{Q}$  è il gradiente della funzione di snervamento convessa, isotropa, continua e regolare delle variabili di stato tensione e parametri scalari che governano l'incrudimento.

- $\mathbf{P}$  è una funzione isotropa e continua delle variabili di stato.

Si assume inoltre che il tensore  $\mathbf{P}$  *soddisfi alle seguenti condizioni* (Runesson e Mróz 1989, Simo 1990):

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} > 0, \quad H_0 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}] > 0. \quad (8.4)$$

La  $(4)_1$  impone che, nello spazio di Haigh-Westergaard, il vettore che rappresenta  $\mathbf{P}$  sia diretto verso l'esterno della superficie di snervamento. La  $(4)_2$  impone invece che il tensore  $\mathbf{P}$  sia diretto esternamente alla superficie di snervamento nella metrica  $\mathbf{E}$ . Si noti che nessuna delle due condizioni è più forte dell'altra<sup>21</sup>.

- Sono esclusi lo snap-back e l'incrudimento post-critico, quindi il modulo di incrudimento deve soddisfare la condizione:

$$H_0 + H > 0. \quad (8.5)$$

Il legame costitutivo (1)-(3) si riduce, nel caso di legge di flusso associata, al legame proposto da Hill (1958, 1959), che a sua volta, impiegando la superficie di snervamento di Huber-von Mises, si riduce alla " $J_2$  flow theory" (cfr. Hutchinson 1973).

Il legame costitutivo (1)-(3) è stato proposto da

<sup>21</sup>Se si assume l'esistenza di una superficie potenziale plastico, risulta spontaneo richiedere che questa sia almeno una stella di centro  $\mathbf{T}=\mathbf{0}$ . In questo caso risulta anche:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{P} \geq 0,$$

ove  $\mathbf{T}$  è il valore dello sforzo nel punto della superficie di snervamento dove è valutato  $\mathbf{P}$ . Se inoltre la superficie potenziale plastico viene assunta convessa, allora vale anche la condizione  $\mathbf{T}^d \cdot \mathbf{P}^d \geq 0$ .

Raniecki (1979), Raniecki e Bruhns (1981), Runesson e Mróz (1989).

Dalle (2) e (3) risulta che il tensore  $\mathbb{C}$ , che è una funzione della velocità di deformazione, definisce un legame incrementalmente lineare a tratti<sup>22</sup>. Si può notare inoltre che  $\mathbb{C}$  possiede le simmetrie minori (indotte da  $\mathbb{D}$  e  $\mathbb{K}$ ), ma non la maggiore.  $\mathbb{C}$  diventa invece simmetrico nel caso particolare di legge di flusso associata ( $\mathbb{P}=\mathbb{Q}$ ).

Si assume, nel seguito, la descrizione Lagrangiana relativa e si adotta quindi quale configurazione di riferimento quella attuale. In tale ipotesi risulta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} , \quad J = 1 . \quad (8.6)$$

Attraverso l'impiego della (2.6.14), il legame costitutivo incrementale (1) può essere espresso in funzione della derivata materiale del primo tensore di Piola-Kirchhoff e del gradiente della velocità spaziale:

$$\dot{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbb{C}} [\mathbf{L}] , \quad (8.7)$$

ove:

$$\tilde{\mathbb{C}}_{ijhk} = \mathbb{C}_{ijhk} + \frac{1}{2} [T_{jk} \delta_{ih} - T_{ih} \delta_{jk} - T_{ik} \delta_{jh} - T_{jh} \delta_{ik}] , \quad (8.8)$$

essendo  $\delta$  il simbolo di Krönecker. Si noti che il secondo addendo nella (8) possiede, al contrario di  $\mathbb{C}$ , le simmetrie

---

<sup>22</sup> Si distingue in questo modo dai legami incrementalmente non lineari (o a infinite zone tensoriali) ove il tensore costitutivo del quarto ordine è funzione continua della direzione della velocità di deformazione (Darve 1990 a, b).

maggiori, mentre non possiede, come  $\mathbb{C}$ , le minori.

#### *Osservazioni*

- i.) Needleman e Rice (1978), Rudnicki e Rice (1975), Rice (1976), Rice e Rudnicki (1980) si riferiscono ad un legame costitutivo incrementale che, a differenza del legame (1), lega la derivata di Jaumann dello sforzo di Cauchy alla velocità di deformazione:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbb{C}[\mathbf{D}]. \quad (8.9)$$

Questo legame può essere ottenuto, in analogia al legame (1), facendo riferimento ad un legame elastico del tipo:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbb{E}[\mathbf{D} - \mathbf{D}^p], \quad (8.10)$$

e differenziando la funzione di snervamento rispetto al tensore di Cauchy. Il legame elastoplastico (9) si riduce al legame (1) (e quindi al legame elastoplastico proposto da Hill (1958) nel caso associato) solo se è trascurabile il termine  $(\mathbf{T} \text{ tr } \mathbf{D})$ . Tale condizione si verifica, ad esempio, nel caso di deformazione isocorica (cfr. Hill e Hutchinson 1975)

- ii) Nel caso di legge di flusso associata ( $\mathbf{P}=\mathbf{Q}$ ), il tensore  $\overset{\circ}{\mathbb{C}}$  possiede tutte le simmetrie. Quindi  $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$  può essere derivato da un potenziale:

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}} = \partial F / \partial \mathbf{D}, \quad F = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \overset{\circ}{\mathbb{C}}[\mathbf{D}]. \quad (8.11)$$

Se si ha  $H > 0$  il tensore  $\overset{\circ}{\mathbb{C}}$  risulta invertibile e in tal caso anche  $\mathbf{D}$  può essere ricavato da un potenziale:

$$\mathbf{D} = \partial F_c^{\circ} / \partial \mathbf{K}, \quad F_c^{\circ} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}^{-1} [\mathbf{K}]. \quad (8.12)$$

L' esistenza dei potenziali (11) e (12) è alla base della formulazione di principi variazionali d' estremo per la soluzione di problemi al contorno incrementali.

### 3.9 PROPRIETÀ DEL TENSORE COSTITUTIVO ELASTOPLASTICO

*Proposizione 1.* Il tensore  $\mathbf{C}^h$  possiede, al più, due autovalori distinti:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{array} \right\} = \frac{6B\mu \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + (3B+2\mu) H \pm \sqrt{\Delta}}{2 (H_o + H)}, \quad (9.1)$$

dove:

$$\Delta = \left[ 6B\mu \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + (3B+2\mu) H \right]^2 - 24 B\mu H [H_o + H]. \quad (9.2)$$

Si noti che:

$$a) \lim_{H \rightarrow +\infty} \Gamma_i = \begin{cases} 3B \\ 2\mu \end{cases} \quad (\text{autovalori del tensore elastico}).$$

$$b) H=0 \Rightarrow \Gamma_i = \begin{cases} 0 \\ (6B\mu \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})/H_o \end{cases} \quad (\text{plasticità perfetta}).$$

c) Sono possibili autovalori complessi se e solo se  $\Delta < 0$ .

*Dimostrazione*<sup>23</sup>:

Sia  $\mathbf{X} \in \text{Sym}$  l' autovettore associato all' autovalore  $\Gamma$ . Allora risulta:

---

<sup>23</sup> Tale dimostrazione è dovuta a Prevost (1987).

$$C^h[X] = E[X] - \frac{1}{H_0 + H} Q \cdot E[X] \quad E[P] = \Gamma X. \quad (9.3)$$

Introdotta lo scalare (positivo nel caso di carico plastico):

$$a = Q \cdot E[X] / (H_0 + H), \quad (9.4)$$

la (3) diventa:

$$a E[P] = (E - \Gamma I)[X]. \quad (9.5)$$

Impiegando l' espressione (6.6) del tensore elastico, la (5) diventa:

$$a \left[ \lambda I \otimes I + 2\mu I \right] [P] = \left[ \lambda I \otimes I + (2\mu - \Gamma) I \right] [X]. \quad (9.6)$$

Dalla (6) si ricava:

$$\text{tr } X = a \frac{3B}{(3B - \Gamma)} \text{tr } P \quad \text{e} \quad X^d = a \frac{2\mu}{(2\mu - \Gamma)} P^d, \quad (9.7)$$

$$\text{ove } X^d = X - \frac{1}{3} \text{tr} X I \quad \text{e} \quad P^d = P - \frac{1}{3} \text{tr} P I.$$

Dalla (7) il tensore  $X$  risulta nella forma:

$$X = \frac{a}{(3B - \Gamma)(2\mu - \Gamma)} \{ 6B\mu P - \Gamma E[P] \}. \quad (9.8)$$

Sostituendo la (8) nella (4) si ottiene:

$$\Gamma^2 (H_0 + H) - \Gamma [6B\mu P \cdot Q + (3B + 2\mu) H] + 6B\mu H = 0, \quad (9.10)$$

le cui soluzioni sono date dalla (1). ■

*Proposizione 2.* (Definitezza positiva del tensore  $\mathbb{C}^h$ )<sup>24</sup>:

Il tensore  $\mathbb{C}^h$  è definito positivo per valori di  $H$  maggiori di un valore critico  $H_{cr}^w$  definito dalla:

$$H_{cr}^w = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{Q \cdot E[Q] P \cdot E[P]} - P \cdot E[Q] \right], \quad (9.11)$$

inoltre, se  $H = H_{cr}^w$ ,  $\mathbb{C}^h$  risulta semidefinito positivo:

$$D^w = \sqrt{P \cdot E[P]} Q + \sqrt{Q \cdot E[Q]} P : D^w \cdot \mathbb{C}^h[D^w] = 0. \quad (9.12)$$

Si noti che la (11) impone  $H_{cr}^w \geq 0$  e che, nel caso di legge di flusso associata, risulta sempre  $H_{cr}^w = 0$ .

*Dimostrazione*<sup>25</sup>:

La definitezza positiva di  $\mathbb{C}^h$  impone:

<sup>24</sup>È facile verificare che, nel caso dei tensori non simmetrici, la definitezza positiva non implica necessariamente che gli autovalori siano reali. Come esempio, si consideri la matrice seguente:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Nel caso di matrici non simmetriche, continuano a valere invece le seguenti proprietà:

- 1.) Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico.
- 2.) Il determinante è uguale al prodotto degli autovalori (reali e complessi).
- 3.) Gli autovalori reali di una matrice definita positiva, sono strettamente positivi.

<sup>25</sup>Tale dimostrazione è stata fornita da Mróz (1963) nel caso di una particolare legge di flusso plastico ed è stata ottenuta in forma definitiva da Maier e Hueckel (1979). La dimostrazione che viene riportata nel seguito è dovuta a Prevost (1987). Una ulteriore dimostrazione è stata fornita da Runesson e Mróz (1989).

$$X \cdot C^h[X] > 0. \quad \forall X \in \text{Sym} - \{0\} \quad (9.13)$$

Dalla definizione (8.2) di  $C^h$  e (5.13) di  $H_0$  risulta:

$$X \cdot C^h[X] = \frac{(H + Q \cdot E[P]) X \cdot E[X] - Q \cdot E[X] X \cdot E[P]}{H_0 + H}. \quad (9.14)$$

Poichè  $E$  è definito positivo, sono valide le due seguenti disuguaglianze<sup>26</sup>:

$$Q \cdot E[X] \leq \sqrt{Q \cdot E[Q] X \cdot E[X]} \quad \text{e} \quad P \cdot E[X] \leq \sqrt{P \cdot E[P] X \cdot E[X]}, \quad (9.15)$$

e condizione sufficiente affinché almeno una delle due disuguaglianze sia stretta è che risulti:

$$X \neq \beta Q + \gamma P. \quad \forall \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (9.16)$$

Utilizzando la (14) e le (15), nell' ipotesi che valga la (16), si ottiene:

$$\begin{aligned} X \cdot C^h[X] &> \frac{H + P \cdot E[Q] - \sqrt{Q \cdot E[Q] P \cdot E[P]}}{H + H_0} X \cdot E[X] \geq \\ &\geq \frac{H}{H + H_0} X \cdot E[X]. \end{aligned} \quad (9.17)$$

<sup>26</sup>Le (15) sono una applicazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$(Y \cdot E[Z])^2 \leq Y \cdot E[Y] Z \cdot E[Z], \quad \forall Y, Z \in \text{Sym} \quad (N.1)$$

valida poichè  $E$  è definito positivo. Nella (N.1) il segno di uguaglianza vale se e solo se  $Y$  e  $Z$  sono linearmente dipendenti:

$$\exists \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\} : \beta Y + \gamma Z = 0. \quad (N.2)$$

Poichè è  $H + H_o > 0$ , la condizione  $H > 0$  è sufficiente ad assicurare la definitezza positiva di  $\mathbb{C}^h$ , sotto la validità della condizione (16). Si noti che, nel caso della legge di flusso associata, la (17) resta valida sotto la condizione  $\mathbf{X} \neq \gamma \mathbf{Q}$ ,  $\forall \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Si consideri ora  $\mathbf{X}$  nella forma:

$$\mathbf{X} = \beta \mathbf{Q} + \gamma \mathbf{P}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (9.18)$$

risulta quindi:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{X}] = \beta \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}] + \gamma \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}], \quad (9.19)$$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{X}] = \beta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}] + \gamma \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}], \quad (9.20)$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{X}] = \beta^2 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}] + 2\beta\gamma \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}] + \gamma^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}]. \quad (9.21)$$

Sostituendo la (18) nella (14) e tenendo conto delle (19-21), si ottiene:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbb{C}^h[\mathbf{X}] = \frac{H}{H_o + H} \left[ \beta^2 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}] + 2\beta\gamma \left( H_o + \frac{H_o^2 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}] \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}]}{2H} \right) + \gamma^2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}] \right]. \quad (9.22)$$

Il secondo membro della (22) è positivo per ogni  $\beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$  se e solo se:

$$\left[ H_o + \frac{H_o^2 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}] \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}]}{2H} \right]^2 - \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}] \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}] < 0, \quad (9.23)$$

disuguaglianza verificata se  $H > H_{cr}^w$ , con  $H_{cr}^w$  dato dalla (9.11). La dimostrazione che  $H > H_{cr}^w$  è una condizione sufficiente per la definitezza positiva di  $\mathbb{C}^h$  risulta dunque completa. D' altra parte se  $H = H_{cr}^w$ , il primo membro della (23) si annulla e, in corrispondenza di ogni  $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ , esiste un  $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$  tale che la (22) si annulla per  $\mathbf{X} = \beta\mathbf{Q} + \gamma\mathbf{P}$ . Inoltre, per  $H < H_{cr}^w$ , in corrispondenza di ogni  $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$  esiste un intervallo di valori di  $\beta$  tali che  $\mathbf{X} \cdot \mathbb{C}^h[\mathbf{X}] < 0$  se  $\mathbf{X} = \beta\mathbf{Q} + \gamma\mathbf{P}$ . Quindi il valore  $H_{cr}^w$  rappresenta la soglia, superata la quale il tensore costitutivo non risulta più definito positivo. ■

*Proposizione 3.* (Autovalori complessi del tensore  $\mathbb{C}^h$ ):

Nell' ambito delle ipotesi costitutive illustrate nel § 3.9, il tensore costitutivo ammette autovalori complessi se e solo se:

$$\text{trP trQ} > 0, \quad \mathbf{P}^d \cdot \mathbf{Q}^d < 0 \text{ e } H_2 < H < H_1, \quad (9.24)$$

dove  $\mathbf{P}^d$  e  $\mathbf{Q}^d$  indicano le parti deviatoriche dei tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ <sup>27</sup> e  $H_1$  ed  $H_2$  sono definiti come:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \\ H_2 \end{array} \right\} = \frac{2}{3} B \frac{\mu}{\lambda} \left[ \sqrt{-3 \mathbf{P}^d \cdot \mathbf{Q}^d} \pm \sqrt{\text{trP trQ}} \right]^2. \quad (9.25)$$

---

<sup>27</sup>Si noti che la condizione  $\mathbf{P}^d \cdot \mathbf{Q}^d < 0$  non risulta soddisfatta dalla maggior parte delle leggi di flusso non-associate proposte in letteratura, tra le quali quella  $\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \xi \mathbf{I}$  (cfr. § 3.10, Bigoni e Hueckel 1990 b, Bigoni e Laudiero 1989, Jenike e Shield 1959, Loret e Prevost 1986, Needleman 1979, Nemat-Nasser e Shokooh 1980, Rudnicki e Rice 1975, Rice 1976).

*Dimostrazione:*

Gli autovalori (1) del tensore  $\mathbb{C}^h$  sono complessi coniugati se e solo se il determinante  $\Delta$ , definito dalla (2) risulta negativo, quindi, per la ipotesi (8.5) solo se  $H > 0$ . Inoltre, la disequazione di secondo grado  $\Delta < 0$  risulta soddisfatta se e solo se  $H$  è interno all' intervallo delle radici dell' equazione  $\Delta = 0$ . Tale equazione, utilizzando la (2) e la definizione (6.11) di  $H_0$ , diventa:

$$3 \lambda^2 H^2 - 4 \mu \lambda (2 \operatorname{tr} P \operatorname{tr} Q - 3 P \cdot Q) H + 12 B^2 \mu^2 (P \cdot Q)^2. \quad (9.26)$$

Le radici della (26) sono fornite dalla (25) e risultano reali ed entrambe positive se e solo se valgono le (24)<sub>1,2</sub>. ■

### 3.10 SUPERFICI DI SNERVAMENTO E LEGGI DI FLUSSO PLASTICO TIPICHE

Vengono riportate le espressioni di alcune superfici di snervamento che verranno utilizzate in seguito. Viene inoltre discussa una legge di flusso plastico di impiego comune in letteratura.

- *Superficie di snervamento di Huber-von Mises*

La superficie ha equazione:

$$f(\mathbf{T}, \mathbf{k}_1) = J_2 - k_1 = 0, \quad (10.1)$$

dove  $J_2$  è il secondo invariante dello sforzo deviatorico<sup>28</sup> (da cui il nome  $J_2$  flow theory). La (1) rappresenta, nello spazio di Haigh-Westergaard, un cilindro avente sezione circolare sul piano  $\pi$  e asse coincidente con l'asse ottaedrico. In plasticità finita la (1) è usualmente sostituita da una relazione formalmente identica dove  $J_2$  rappresenta però il secondo invariante dello sforzo di Kirchhoff (Hutchinson 1973, Neale 1981, Zaccaria 1989).

Tenendo presente che  $\partial J_2 / \partial \mathbf{T} = \mathbf{T}^d$ , il gradiente  $\mathbf{Q}$  risulta:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^d . \quad (10.2)$$

- *Superficie di snervamento di Drucker-Prager*

Il modo più semplice di mettere in conto l'influenza della componente ottaedrica dello sforzo sullo snervamento è quello di modificare il criterio di Huber-von Mises ammettendo che il diametro della sezione deviatorica vari linearmente con lo sforzo ottaedrico. Nello spazio di Haigh-Westergaard si ottiene quindi un cono retto circolare centrato sull'asse ottaedrico (Drucker e Prager 1952):

$$f(\mathbf{T}, k_1) = \frac{k_1}{3} \text{tr} \mathbf{T} + \sqrt{J_2} - k_2 = 0, \quad (10.3)$$

dove  $k_1$  e  $k_2$  sono i parametri che governano l'incrudimento. Nella (3)  $\sqrt{2} k_2$  rappresenta il raggio della sezione con il piano  $\pi$  e  $k_2/k_1$  rappresenta il valore della tensione isotropa di trazione che provoca lo snervamento. Nel caso in cui  $k_1$  non sia influenzato dal flusso plastico, la superficie di snervamento subisce una espansione omotetica durante l'

---

<sup>28</sup>  $J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{T}^d \cdot \mathbf{T}^d = \frac{1}{6} [(T_{11} - T_{22})^2 + (T_{22} - T_{33})^2 + (T_{11} - T_{33})^2] + T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{13}^2$

incrudimento.

Il gradiente  $\mathbf{Q}$  risulta:

$$\mathbf{Q} = \frac{k_1}{3} \mathbf{I} + \frac{1}{2} [J_2]^{-1/2} \mathbf{T}^d, \quad (10.4)$$

da cui si ottiene  $\text{tr}\mathbf{Q} = k_1$ .

Di fatto la maggior parte dei modelli effettivamente impiegati in plasticità finita fanno riferimento alle superfici di snervamento di Huber-von Mises (Hutchinson 1973, Hill e Hutchinson 1975, Neale 1981, Zaccaria 1989) o di Drucker-Prager (Needleman 1979, Nemat-Nasser e Shokooh 1980, Rice 1976, Rudnicki e Rice 1975, Rudnicki 1977). Le superfici di snervamento presentate nel seguito risultano più appropriate alla descrizione del comportamento dei materiali dilatanti o contraenti il cui snervamento dipende dalla componente ottaedrica dello sforzo. Queste superfici di snervamento, a conoscenza dello scrivente, non sono state usate per analisi in deformazione finita.

- *Superficie di snervamento di Roscoe-Burland*  
*"modified Cam-Clay"*

$$f(\mathbf{T}, k_1) = (\text{tr}\mathbf{T} - k_1)^2 + k_2 J_2 - k_3 = 0, \quad (10.5)$$

dove i parametri  $k_i$  governano l' incrudimento.

La (10.5), proposta indipendentemente da Merkle (1970) per applicazioni al conglomerato cementizio, era stata precedentemente impiegata da Roscoe e Burland (1968) per la interpretazione del comportamento dei materiali argillosi. Nello spazio di Haigh-Westergaard la (5) rappresenta un ellissoide di rotazione centrato sull' asse ottaedrico.

Dalla (5) si ricava la seguente espressione del gradiente  $\mathbf{Q}$  :

$$Q = 2 (\text{tr } T - k_1) I + k_2 T^d . \quad (10.6)$$

- *Superficie di snervamento di Ottosen*

Questa superficie di snervamento, funzione di quattro parametri, fu proposta da Ottosen (1977, cfr. Chen e Han 1988, § 7), per le applicazioni al conglomerato cementizio:

$$f(T, k_1) = k_1 \frac{J_2}{f_c^2} + \theta \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + k_2 \frac{\text{tr} T}{f_c} - 1 = 0, \quad (10.7)$$

dove i parametri  $k_1$  ed il parametro  $\theta = \theta(\vartheta, k_3, k_4)$  governano l'incrudimento e  $f_c$  rappresenta la resistenza a compressione monoassiale. Si assume, per semplicità, la funzione  $\theta$  indipendente dall'invariante  $\vartheta$  (cfr. § 3.4). In questa ipotesi si può identificare  $\theta$  con un'altra variabile che governa l'incrudimento; il gradiente  $Q$  risulta quindi:

$$Q = \frac{k_2}{f_c} I + \left[ \frac{k_1}{f_c^2} + \frac{\theta}{2 \sqrt{J_2} f_c} \right] T^d. \quad (10.8)$$

Si noti che, per  $k_1=0$ , il criterio (7) si riduce al criterio di Drucker-Prager e la (8) alla (4).

- *Superficie di snervamento di Bresler-Pister*

Anche questa superficie di snervamento è stata proposta per applicazioni al conglomerato cementizio (Bresler e Pister 1958; cfr. Chen 1982, Chen e Han 1988). Essa risulta funzione di tre parametri (che governano l'incrudimento)  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ :

$$f = \frac{k_1}{3f_c} \text{trT} + \frac{\sqrt{2/5}}{f_c} \sqrt{J_2} - \frac{k_2}{9f_c^2} (\text{trT})^2 - k_3 = 0. \quad (10.9)$$

Anche in questo caso, ponendo  $k_2=0$ , si ottiene la superficie di Drucker-Prager. Il gradiente  $\mathbf{Q}$  risulta:

$$f = \left[ \frac{k_1}{3f_c} - 2 \frac{k_2}{9f_c^2} \text{trT} \right] \mathbf{I} + \frac{\mathbf{T}^d}{f_c \sqrt{10 J_2}}. \quad (10.10)$$

In tutti i casi (2), (4), (6), (8) e (10) il gradiente  $\mathbf{Q}$  può essere espresso nella forma:

$$\mathbf{Q} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{T}^d, \quad (10.11)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono funzioni, in generale, dei parametri di incrudimento e degli invarianti dello sforzo  $\text{trT}$  e  $J_2$ .

Una legge di flusso plastico ampiamente adottata in letteratura (Baker e Desai 1982, Bigoni e Hueckel 1990 b, Bigoni e Laudiero 1989, Jenike e Shield 1959, Loret et al. 1990, Loret e Prevost 1986, Needleman 1979, Nemat-Nasser e Shokooh 1980, Prevost 1984, Prevost e Hughes 1980, Rice 1976, Rudnicki e Rice 1975, Rudnicki 1977) è fornita dalla relazione:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \xi \mathbf{I}, \quad (10.12)$$

dove  $\xi$  è una funzione scalare. La (12) restringe la non-associatività alla componente volumetrica della deformazione plastica. Questa assunzione è valida per diversi materiali di interesse ingegneristico tra i quali il conglomerato cementizio, le rocce (Rudnicki 1977) e i mezzi granulari (Lade e Duncan 1973, 1975).

Dalla (12) risulta  $\mathbf{Q}^d = \mathbf{P}^d$ , quindi, ovviamente,  $\mathbf{P}^d \cdot \mathbf{Q}^d > 0$ . La proposizione 3 del § 3.9 esclude allora la possibilità che il tensore costitutivo  $\mathbb{C}^h$  ammetta autovalori complessi. Il tensore costitutivo diventa in questo caso:

$$\mathbb{C}^h[\mathbf{D}] = \mathbb{E}[\mathbf{D}] - \frac{\langle \mathbf{D} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Q}] \rangle}{H_0 + H} (\mathbb{E}[\mathbf{Q}] + 3B\xi \mathbf{I}) . \quad (10.13)$$

Le restrizioni (8.4) impongono:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \xi \operatorname{tr} \mathbf{Q} > 0 , \quad (10.14)$$

$$\lambda \operatorname{tr}^2 \mathbf{Q} + 2\mu \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \xi \operatorname{tr} \mathbf{Q} (3\lambda + 2\mu) > 0 , \quad (10.15)$$

senz' altro verificate se  $\xi \operatorname{tr} \mathbf{Q} \geq 0$ , oppure nel caso risulti  $\operatorname{tr} \mathbf{Q} > 0$ , se:

$$\xi > - \operatorname{tr} \mathbf{Q} / 3 - \frac{2\mu \mathbf{Q}^d \cdot \mathbf{Q}^d}{3B \operatorname{tr} \mathbf{Q}} , \quad (10.18)$$

dove l' indice d indica la parte deviatorica.

I modelli elastoplastici non associati proposti per analisi in deformazione finita da Needleman (1979), Nemat-Nasser e Shokooh (1980), Rudnicki e Rice (1975), Rudnicki (1977), si riferiscono alla superficie di snervamento di Drucker-Prager e assumono un incrudimento isotropo e una legge di flusso plastico del tipo (12). Con queste assunzioni, il tensore costitutivo non ammette autovalori complessi, i tensori  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  risultano coassiali ed inoltre risulta:

$$T_i = T_j \Leftrightarrow P_i = P_j \Leftrightarrow Q_i = Q_j , \quad (10.19)$$

dove gli indici denotano le componenti nel sistema di

riferimento principale.

Nel lavoro di Needleman (1979), ove  $\text{tr}\mathbf{Q} > 0$ , è stato assunto  $\xi = -\text{tr}\mathbf{Q}/3$ , quindi la (18) è soddisfatta; in quello di Nemat-Nasser e Shokooh (1980) risulta  $\text{tr}\mathbf{Q} > 0$  e la (18) è soddisfatta e analogamente in quello di Rudnicki e Rice (1975) tutte le applicazioni sono state sviluppate per valori di  $\xi$  che soddisfano la (18).

## Capitolo 4

### LEGAMI ELASTOPLASTICI INCREMENTALI PER PROBLEMI

#### PIANI DI TENSIONE E DI DEFORMAZIONE

##### 4.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo vengono introdotti, nell'ambito della teoria infinitesima, i legami elastoplastici incrementali nel caso degli stati piani di tensione e di deformazione. Questi legami vengono ottenuti come casi particolari delle equazioni costitutive introdotte nel capitolo precedente. In tal modo risulta peraltro spontaneo introdurre un legame non associato nel caso dello stato piano di tensione<sup>1</sup>. Nel caso dello stato piano di deformazione, viene invece dedotto un legame costitutivo di carattere più generale rispetto a quello usualmente introdotto<sup>2</sup>, in cui tutte le grandezze sono definite direttamente in  $\mathbb{R}^2$ . La condizione di perdita di definitezza positiva dell'operatore costitutivo viene poi specializzata ai casi piani. Tale risultato è stato ottenuto da Bigoni e Hueckel (1989 a, 1990 a) nel caso della legge di flusso associata e poi esteso anche alla legge di flusso non associata (Bigoni e Hueckel 1991 a).

---

<sup>1</sup>Un legame costitutivo analogo è stato recentemente presentato anche da Samuelsson (Chalmer Univ., Goteborg, Sweden) nel corso CISM "Progress in computational analysis of inelastic structures", Udine, 1-5 ottobre 1990.

<sup>2</sup>Si veda, Hill e Hutchinson (1975), Hill (1979).

## 4.2 STATO PIANO DI TENSIONE

Si assumono valide le assunzioni costitutive (3.2.1-3.2.7) introdotte nel § 3.2, che nel caso dello stato piano di tensione assumono la forma di seguito riportata.

### 1. Legame incrementale tensione-deformazione

$$\dot{\bar{\mathbf{T}}} = \mathfrak{C}[\dot{\bar{\mathbf{D}}} - \dot{\bar{\mathbf{D}}^P}], \quad (2.1)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{T}}}_{i3} = 0, \quad i=1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Nella (1) i tensori  $\bar{\mathbf{T}}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}$  e  $\bar{\mathbf{D}}^P$  rappresentano le restrizioni ad  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  dei tensori tridimensionali  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{D}^P$ . Il tensore del quarto ordine  $\mathfrak{C}$ , rappresenta il tensore costitutivo elastico nel caso piano di tensione. Esso è ricavabile dal legame elastico tridimensionale imponendo il vincolo (2) (Cfr. Gurtin 1972, § VII):

$$\mathfrak{C} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \bar{\mathbf{I}} \otimes \bar{\mathbf{I}} + \frac{E}{(1+\nu)} \bar{\mathbb{I}}, \quad (2.3)$$

dove  $\bar{\mathbf{I}}$  ed  $\bar{\mathbb{I}}$  sono i tensori identità rispettivamente del secondo e del quarto ordine di dimensione 2.

### 2. Funzione di snervamento

$$f(\mathbf{T}, k_1) = 0, \quad (2.4)$$

dove  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  e  $k_1$  rappresenta il generico membro dell'insieme degli scalari che governano l'incrudimento<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>La funzione di snervamento può essere anche introdotta direttamente nel piano, restringendo  $\mathbf{T}$  a  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ .

## 3. Legge di flusso plastico

$$\bar{D}^p = \Lambda \bar{P}, \quad (2.5)$$

$$D_{33}^p = \Lambda P_{33}, \quad (2.6)$$

dove  $\bar{P}$  rappresenta la restrizione ad  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  del tensore  $P$  definito in  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ .

## 4. Legge di incrudimento

$$\dot{k}_1 = \Lambda \bar{k}_1, \quad (2.7)$$

dove  $\bar{k}_1$  è la funzione scalare delle variabili di stato che corrisponde al generico parametro di incrudimento  $k_1$ .

Imponendo la condizione di consistenza di Prager (1949) e tenendo presente la condizione (2), si ottiene:

$$\dot{\bar{T}} = \mathcal{E}[\bar{D}], \quad (2.8)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^h, \quad \text{se } \bar{Q} \cdot \mathcal{E}[\bar{D}] > 0, \quad (2.9)_1$$

$$\mathcal{E}^h = \mathcal{E} - \frac{1}{\bar{H}_0 + H} \mathcal{E}[\bar{P}] \otimes \mathcal{E}[\bar{Q}], \quad (2.9)_2$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}, \quad \text{se } \bar{Q} \cdot \mathcal{E}[\bar{D}] \leq 0, \quad (2.10)$$

mentre le componenti di sforzo fuori dal piano sono ovviamente nulle. Nella (9)  $\bar{H}_0 = \bar{Q} \cdot \mathcal{E}[\bar{P}]$ .

Usando la stessa tecnica impiegata nel § 3.6 il legame

(8-10) può essere invertito, se  $H > 0$ , ottenendo:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathfrak{C}^{-1}[\dot{\bar{\mathbf{T}}}], \quad (2.11)$$

$$\mathfrak{C}^{-1} = \mathfrak{C}^{-1} + \frac{1}{H} \bar{\mathbf{P}} \otimes \bar{\mathbf{Q}}, \quad \text{se } \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{T}} > 0, \quad (2.12)$$

$$\mathfrak{C}^{-1} = \mathfrak{C}^{-1}, \quad \text{se } \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{T}} \leq 0. \quad (2.13)$$

Si noti che nei legami (11-13), essendo<sup>4</sup>  $\mathfrak{E}^{-1} = (\overline{\mathbf{E}^{-1}})$  ed  $\mathfrak{C}^{-1} = (\overline{\mathbf{C}^{-1}})$ , tutte le grandezze tensoriali risultano essere le restrizioni a  $\mathbb{R}^2$  del legame 3.6.5. Il legame costitutivo (8-10), nel caso della legge di flusso non associata, non risulta riportato in letteratura, anche se può apparire interessante per le possibili applicazioni alle lastre di calcestruzzo caricate nel piano o alle murature (in condizioni di rottura). Nel caso del materiale rigido-plastico, un modello piano con legge di flusso plastico non associata è stato proposto, ad esempio, da Lo Bianco e Mazzarella (1984).

### 4.3 PERDITA DI DEFINITEZZA POSITIVA DEL TENSORE COSTITUTIVO PER STATI PIANI DI TENSIONE

Le proprietà derivate nel § 3.9 per il tensore costitutivo  $\mathfrak{C}^h$  sono particolarizzabili al caso dell'operatore costitutivo  $\mathfrak{C}^h$  precedentemente definito.

*Proposizione 1.* (Definitezza positiva del tensore  $\mathfrak{C}^h$ ):

Per valori di  $H$  maggiori del modulo critico:

---

<sup>4</sup> Il soprassegno  $(\bar{\quad})$  indica la restrizione a  $\mathbb{R}^2$  di una grandezza definita in  $\mathbb{R}^3$

$$H_{cr}^w = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\bar{Q} \cdot \mathbb{C}[\bar{Q}]} \bar{P} \cdot \mathbb{C}[\bar{P}] - \bar{P} \cdot \mathbb{C}[\bar{Q}] \right], \quad (3.1)$$

il tensore  $\mathbb{C}^h$  è definito positivo. Se  $H = H_{cr}^w$ , il tensore  $\mathbb{C}^h$  risulta semidefinito positivo:

$$\bar{D}^w = \sqrt{\bar{P} \cdot \mathbb{C}[\bar{P}]} \bar{Q} + \sqrt{\bar{Q} \cdot \mathbb{C}[\bar{Q}]} \bar{P} : \bar{D}^w \cdot \mathbb{C}^h[\bar{D}^w] = 0. \quad (3.2)$$

Si noti che la (1) impone  $H_{cr}^w \geq 0$  e che, nel caso della legge di flusso associata, risulta sempre  $H_{cr}^w = 0$ .

La dimostrazione viene omessa essendo formalmente identica a quella riportata per l'operatore  $\mathbb{C}^h$  (cfr. § 3.9, prop. 2).

#### 4.4 STATO PIANO DI DEFORMAZIONE

Si assumono validi i legami costitutivi (3.8.1-3.8.3) introdotti nel § 3.8. Lo stato di deformazione piana impone le seguenti restrizioni sul tensore velocità di deformazione:

$$D_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

ove l'indice 3 si riferisce alla direzione normale al piano della deformazione.

La restrizione (1) è imposta sulla somma delle aliquote elastica e plastica della velocità di deformazione che possono essere, in generale, non separatamente nulle<sup>5</sup>. Ricordando la coassialità dei tensori  $P$  e  $Q$  al tensore dello sforzo e limitandosi a storie tensionali che si sviluppano a partire da uno stato iniziale elastico piano di deformazione, consegue che la direzione 3 è una direzione principale per i tensori  $P$ ,  $Q$ ,  $T$  e quindi:

---

<sup>5</sup> Tale circostanza è discussa in Martin (1975, pp. 347-352) e Lubliner (1990, pp. 135-136).

$$D_{13}^e = D_{13}^p = 0, \quad i \neq 3. \quad (4.2)$$

Tenendo conto delle (1-2) il legame costitutivo (3.8.1-3) può essere posto nella forma:

$$\dot{\bar{T}} = \bar{E}[\bar{D}] - \frac{\langle \bar{N} \cdot \bar{D} \rangle}{H + H_0} \bar{M}, \quad (4.3)$$

$$\dot{T}_{33} = E_{33ij} D_{ij} - \frac{\langle \bar{N} \cdot \bar{D} \rangle}{H + H_0} M_{33}, \quad (4.4)$$

dove  $\bar{E}$ , restrizione di  $E$  a  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ , è il tensore elastico relativo allo stato piano di deformazione, lo scalare  $H$  è ancora definito dalla (3.5.13) ed i tensori  $\bar{N}$  ed  $\bar{M} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  sono le restrizioni ad  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  dei seguenti tensori:

$$\mathbf{N} = E[\mathbf{Q}], \quad \mathbf{M} = E[\mathbf{P}]. \quad (4.5)$$

Si noti che la (3) equivale all' introduzione del seguente tensore costitutivo:

$$\bar{C} = \bar{C}^h, \quad \text{se } \bar{N} \cdot \bar{D} > 0, \quad (4.6)_1$$

$$\bar{C}^h = \bar{E} - \frac{\bar{M} \otimes \bar{N}}{H + H_0}, \quad (4.6)_2$$

$$\bar{C} = \bar{E}, \quad \text{se } \bar{N} \cdot \bar{D} \leq 0. \quad (4.7)$$

Il legame (3-4) è di fatto equivalente ad un legame tridimensionale, infatti in un generico problema evolutivo è necessaria la conoscenza dell' intero stato di sforzo (quindi anche della componente  $T_{33}$ ) per determinare i tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  (quindi  $\mathbf{N}$  ed  $\mathbf{M}$ ) e lo scalare  $H$ . La condizione di stato di deformazione piana non porta quindi grosse semplificazioni, da

questo punto di vista, nell' ambito della analisi incrementale.

Il legame costitutivo (3-4) si riduce ad un legame in cui tutte le grandezze sono definite in  $\mathbb{R}^2$  sotto le seguenti ipotesi<sup>6</sup>:

- a) - la parte plastica della deformazione nella direzione ortogonale al piano della deformazione e nulla ( $D_{33}^p = D_{33}^e = P_{33} = 0$ ),
- b) - la superficie di snervamento non e' funzione della componente di sforzo nella direzione ortogonale al piano della deformazione ( $Q_{33} = 0$ ),
- c) - il modulo di incrudimento non e' funzione della componente di sforzo nella direzione ortogonale al piano della deformazione.

Sotto le ipotesi precedenti tutte le grandezze nella (3) sono indipendenti dallo stato del corpo nella direzione ortogonale al piano della deformazione ed un generico problema al contorno puo' essere risolto senza impiegare la (4)<sup>7</sup>.

#### 4.5 PERDITA DI DEFINITEZZA POSITIVA DEL TENSORE COSTITUTIVO PER STATI PIANI DI DEFORMAZIONE

Ricordando la Proposizione 2 del § 3.9, si osserva che la velocità di deformazione critica per il tensore costitutivo  $\mathbb{C}^h$  (3.9.12) non rispetta a priori il vincolo di stato piano di deformazione (4.1). Tenendo conto di tale vincolo, la condizione

---

<sup>6</sup>Una discussione sulla accettabilità di queste ipotesi, sembra essere stata sviluppata solo nell' ambito della elastoplasticità perfetta in relazione al problema dei tubi spessi soggetti a pressione interna. Si veda, a questo proposito Hill et al. (1947), Hill (1950 pp. 106-118), Geiringer (1973 pp. 506-515), Koiter (1953).

<sup>7</sup>Accettare le ipotesi precedenti è equivalente a sviluppare una formulazione in  $\mathbb{R}^2$  delle leggi costitutive incrementali. Rientrano in questa classe la maggior parte dei modelli piani, tra i quali quelli di Hill e Hutchinson (1975), di Hill (1979), di Vardoulakis (1988, 1989).

di definitezza positiva del tensore  $\bar{C}^h$  è equivalente alla definitezza positiva della sua restrizione  $\bar{C}^h$  ad  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ .

*Proposizione 1.* (Definitezza positiva del tensore  $\bar{C}^h$ ):

Per valori di  $H$  maggiori del modulo critico:

$$H_{cr}^w = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\bar{N} \cdot \mathcal{E}[\bar{N}] \bar{M} \cdot \mathcal{E}[\bar{M}]} + \bar{N} \cdot \mathcal{E}[\bar{M}] - 2 H_0 \right], \quad (5.1)$$

il tensore  $\bar{C}^h$  è definito positivo. Se  $H = H_{cr}^w$ ,  $\bar{C}^h$  è semidefinito positivo:

$$\bar{D}^w = \sqrt{\bar{M} \cdot \mathcal{E}[\bar{M}]} \mathcal{E}[\bar{N}] + \sqrt{\bar{N} \cdot \mathcal{E}[\bar{N}]} \mathcal{E}[\bar{M}] \quad : \quad \bar{D}^w \cdot \bar{C}^h[\bar{D}^w] = 0. \quad (5.2)$$

Nella (5.2) il tensore  $\mathcal{E}$  è l'inverso del tensore elastico in deformazione piana  $\bar{E}$  (Cfr. Gurtin 1972, pp. 150-154):

$$\mathcal{E} = (\bar{E})^{-1} = -\frac{\nu}{2G} \bar{I} \otimes \bar{I} + \frac{1}{2G} \bar{II}, \quad (5.3)$$

dove  $\bar{I}$  e  $\bar{II}$  sono i tensori identità rispettivamente del secondo e quarto ordine in dimensione 2.

Si noti che se si accettano le ipotesi (a - c), la (1) e la (2) diventano le restrizioni al piano delle (3.9.11) e (3.9.12).

*Dimostrazione*<sup>8</sup>:

Il modulo plastico critico per la perdita di definitezza positiva del tensore  $\bar{C}^h$  può essere determinato tramite la soluzione del seguente problema di minimo:

---

<sup>8</sup> Nella dimostrazione (Bigoni e Hueckel 1990 a, 1991 a) si sfrutta la tecnica impiegata da Maier e Hueckel (1979) per il caso generale (cfr. § 3.9, prop. 2).

$$\min_{\bar{\mathbf{X}} \in \text{Sym}} \left[ \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^h[\bar{\mathbf{X}}] \right], \quad (5.4)$$

Il problema (4) è equivalente (Maier e Hueckel 1979, cfr. Bigoni e Zaccaria 1991, appendice 1) al seguente problema di minimo vincolato:

$$\min_{\bar{\mathbf{X}} \in \text{Sym}} \left[ \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{E}}[\bar{\mathbf{X}}] - \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{M}} \right], \quad (5.5)$$

soggetto a:

$$\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{N}} = H + H_0. \quad (5.6)$$

La soluzione del problema (5-6) equivale al minimo della funzione non vincolata:

$$\mathcal{L} = \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{E}}[\bar{\mathbf{X}}] - \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{M}} + \omega [\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{N}} - q], \quad (5.7)$$

dove  $\omega$  è un moltiplicatore di Lagrange e  $q = H + H_0$  indica il modulo plastico. Le condizioni di estremo risultano:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = 2 \bar{\mathbf{E}}[\bar{\mathbf{X}}] - \bar{\mathbf{M}} + \omega \bar{\mathbf{N}} = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{N}} - q = 0. \quad (5.9)$$

Dalla (8) si ricava:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{E}[\bar{\mathbf{M}}] - \omega \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}] \right], \quad (5.10)$$

che, sostituita nella (9), fornisce il valore del moltiplicatore di Lagrange:

$$\omega = \frac{\bar{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{M}}] - 2q}{\bar{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}]}. \quad (5.11)$$

Per ricavare la condizione di semidefinitezza positiva, occorre uguagliare a zero il minimo della funzione (7). Ovvero occorre sostituire le condizioni di estremo (10) e (11) nella (7) e uguagliare a zero. Si ottengono in questo modo il valore del modulo di incrudimento critico  $H_{cr}^w$  e la velocità di deformazione critica  $\bar{\mathbf{D}}^w$ . ■

*Osservazioni:*

Tenendo conto del fatto che la direzione 3, ortogonale al piano della deformazione, è una direzione principale per i tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , gli scalari  $\bar{\mathbf{M}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{M}}]$ ,  $\bar{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}]$  e  $\bar{\mathbf{M}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}]$  nelle (1-2) possono essere espressi nella forma:

$$\bar{\mathbf{M}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{M}}] = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{P}] - 2 G (1+\nu) P_{33}^2, \quad (5.12)$$

$$\bar{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}] = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}] - 2 G (1+\nu) Q_{33}^2, \quad (5.13)$$

$$\bar{\mathbf{M}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}] = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{Q}] - 2 G (1+\nu) P_{33} Q_{33}. \quad (5.14)$$

Nel caso particolare della *legge di flusso associata* risulta  $\bar{\mathbf{N}} = \bar{\mathbf{M}}$  e le (1) e (2) si semplificano come segue:

$$H_{cr}^w = \bar{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}] - H_o, \quad (5.15)$$

$$\bar{\mathbf{D}}^w = \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}]. \quad (5.16)$$

Tenendo conto della (13), le (15) e (16) diventano:

$$H_{cr}^w = - 2 G (1+\nu) Q_{33}^2, \quad (5.17)$$

$$\bar{\mathbf{D}}^w = \bar{\mathbf{Q}} + \nu Q_{33} \bar{\mathbf{I}}. \quad (5.18)$$

## Capitolo 5

# UNICITA` DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA ELASTOPLASTICO INCREMENTALE

### 5.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo viene presentato il problema elastoplastico incrementale e la condizione sufficiente di unicità formulata da Hill (1958, 1959, 1961) nell'estensione alle leggi di flusso non associate dovuta a Raniecki (1979) e Raniecki e Bruhns (1981). La definitezza positiva del tensore costitutivo di almeno un solido di confronto della famiglia di Raniecki (1979) rappresenta un principio locale di esclusione per la perdita di unicità nel caso della teoria infinitesima (Raniecki 1979). Si riporta inoltre, con una dimostrazione alternativa rispetto a quella di Raniecki (1979), la dimostrazione della coincidenza di tale principio di esclusione con la perdita di definitezza positiva del tensore costitutivo del solido di confronto di Hill. Infine il principio di esclusione sopra menzionato viene specializzato (sembra per la prima volta) al caso di stato piano di deformazione.

### 5.2 IL PROBLEMA ELASTOPLASTICO INCREMENTALE

Seguendo la terminologia introdotta da R. Hill (1958) si definisce *problema incrementale* il seguente problema. Si suppone

nota la configurazione del corpo in un istante generico di un assegnato processo di carico quasi-statico. Assieme alla configurazione si assumono note tutte le variabili di stato: tensione, deformazione totale, aliquote elastiche e plastiche, modulo e parametri di incrudimento. A partire da questa configurazione equilibrata e nota, si analizza la risposta ad un incremento delle azioni sollecitanti e/o ad una variazione infinitesima delle condizioni cinematiche al contorno. Si assume inoltre che le forze sul contorno vincolato riferite all' unità di superficie indeformata non varino con la deformazione del contorno stesso (*carichi morti*). Ci si limita inoltre al caso quasi-statico. Assumendo come configurazione di riferimento quella attuale (descrizione lagrangiana relativa), le varie misure di sforzo introdotte nel § 2 coincidono tra loro (se calcolate nella configurazione attuale). Inoltre, poichè nella configurazione attuale risulta  $J=1$  e  $\mathbf{F}=\mathbf{I}$ , coincidono anche i tensori  $\dot{\mathbf{G}}$  (derivata materiale del tensore della deformazione di Lagrange),  $\dot{\mathbf{E}}$  (derivata materiale del tensore della deformazione infinitesima) e  $\mathbf{D}$  (tensore velocità di deformazione).

Per un solido di volume corrente  $\mathcal{B}$ , le equazioni incrementali che governano il problema risultano (cfr. § 2.5):

- Equazioni di equilibrio:

$$\text{Div } \dot{\mathbf{S}} + \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (2.1)$$

dove  $\dot{\mathbf{S}}$  rappresenta la derivata materiale del primo tensore di Piola-Kirchhoff e  $\dot{\mathbf{b}}$  l' incremento della forza per unità di volume nella configurazione di riferimento relativo.

- Condizioni al contorno:

- sul contorno  $\partial\mathcal{B}_s$ , ove sono prescritte le forze, si ha:

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{S}}\mathbf{N}, \quad \text{su } \partial\mathcal{B}_s, \quad (2.2)$$

ove  $\dot{\mathbf{f}}$  indica l' incremento nominale della forza esterna superficiale (assunta indipendente dalla deformazione).

- sul contorno  $\partial\mathcal{B}_v$ , ove è prescritta la velocità, si ha:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}, \quad \text{su } \partial\mathcal{B}_v, \quad (2.3)$$

dove  $\bar{\mathbf{v}}$  sono le velocità impresse sulla parte di contorno  $\partial\mathcal{B}_v$ .

- Equazione costitutiva:

$$\dot{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{C}}[\mathbf{L}]. \quad (2.4)$$

Assegnati i campi vettoriali  $\dot{\mathbf{b}}$ ,  $\dot{\mathbf{f}}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$ , la soluzione del problema incrementale consiste nella determinazione del campo di velocità  $\mathbf{v}$  soddisfacente le equazioni (1-4).

### 5.3 UNICITÀ DELLA RISPOSTA INCREMENTALE

Se si ha perdita di unicità, esistono almeno due campi di velocità  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  che verificano la condizione al bordo (2.3) e due corrispondenti campi di sforzo  $\dot{\mathbf{S}}_1$  ed  $\dot{\mathbf{S}}_2$  che soddisfano la condizione al bordo (2.2) e l' equazione di equilibrio (2.1). I campi differenza  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  e  $\Delta\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}}_1 - \dot{\mathbf{S}}_2$  sono quindi in equilibrio con forze nulle sul contorno libero e velocità nulle sul contorno vincolato, quindi:

$$\int_{\partial \mathcal{B}} (\Delta \dot{\mathbf{S}} \mathbf{N}) \cdot \Delta \mathbf{v} = 0, \quad (3.1)$$

dove  $\partial \mathcal{B}$  rappresenta il contorno del corpo. La (2.1) fornisce:

$$\text{Div } \Delta \dot{\mathbf{S}} = 0, \quad (3.2)$$

quindi, applicando il teorema della divergenza alla (1), e notando che  $\text{Grad } \Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{L}$ , si perviene a:

$$\int_{\mathcal{B}} \Delta \dot{\mathbf{S}} \cdot \Delta \mathbf{L} = 0. \quad (3.3)$$

Una condizione sufficiente per la unicità del problema incrementale si ottiene quindi (Hill 1958) richiedendo che il funzionale al primo membro della (3) sia strettamente positivo in corrispondenza di ogni coppia di campi di velocità  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  che soddisfano le condizioni (2.3)<sup>1</sup>. Tale condizione sufficiente di unicità, che è ovviamente valida per qualunque materiale, può essere considerata una naturale estensione del teorema di Kirchhoff della elasticità lineare (Truesdell e Noll 1965, § 68 bis).

Impiegando la equazione costitutiva (2.4), si ha:

$$\Delta \dot{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{C}}[\mathbf{L}_1] - \tilde{\mathbf{C}}[\mathbf{L}_2]. \quad (3.4)$$

A causa della non linearità del tensore costitutivo elastoplastico, la (4) non può essere scritta nella forma  $\Delta \dot{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{C}}[\Delta \mathbf{L}]$ . La verifica della positività del funzionale al primo

---

<sup>1</sup>Viceversa, se la (3) risulta soddisfatta in corrispondenza di due campi di velocità  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  che soddisfano le (2.4), non è detto che si sia effettivamente determinato un punto di biforcazione. Il campo  $\Delta \mathbf{v}$  può infatti non soddisfare la (2.1) e la (2.2).

membro della (3) diventa quindi molto onerosa se effettuata attraverso il legame (4). Soccorre però un *teorema di confronto*, dovuto a Hill (1958) nel caso della legge di flusso associata ed esteso da Raniecki (1979) alle leggi di flusso non associate.

- *Proposizione 1 (teorema di confronto):*

*E' possibile una minorazione a priori dell' integrando al primo membro della (3) introducendo la famiglia di solidi di confronto di Raniecki caratterizzati dal tensore costitutivo  $\mathbb{C}^r$ . Ovvero:*

$$\Delta \mathbf{D} \cdot \mathbb{C}[\mathbf{D}_1] - \Delta \mathbf{D} \cdot \mathbb{C}[\mathbf{D}_2] \geq \Delta \mathbf{D} \cdot \mathbb{C}^r[\Delta \mathbf{D}], \quad (3.5)$$

dove:

$$\mathbb{C}^r = \mathbb{E} - \frac{\mathbb{E}[\mathbf{R}] \otimes \mathbb{E}[\mathbf{R}]}{4\psi (\mathbb{H}_0 + \mathbb{H})}, \quad \forall \psi \in \mathbb{R}^+, \quad (3.6)$$

ed il tensore  $\mathbf{R}$  è definito come:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \psi \mathbf{Q}. \quad (3.7)$$

È immediato verificare che la (5) implica la validità della disuguaglianza  $\Delta \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbb{C}}[\mathbf{L}_1] - \Delta \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbb{C}}[\mathbf{L}_2] \geq \Delta \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbb{C}}^r[\Delta \mathbf{L}]$ , ove  $\tilde{\mathbb{C}}^r$  è definito in analogia a  $\tilde{\mathbb{C}}$  (cfr. § 3.8), ovvero vale la relazione:

$$\tilde{\mathbb{C}}^r - \mathbb{C}^r = \tilde{\mathbb{C}}^h - \mathbb{C}^h.$$

La (6) definisce, al variare di  $\psi$ , una famiglia di solidi di confronto caratterizzati dal legame costitutivo lineare:

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}} = \mathbb{C}^r[\mathbf{D}], \quad (3.8)$$

ove  $\mathbb{C}^r$  ha la struttura del tensore costitutivo di un solido elastoplastico (reso olonómo) con legge di flusso associata, per

il quale il gradiente della funzione di snervamento è  $\mathbf{R}$  e il modulo plastico è  $4\psi (H_0 + H)$ . Il generico solido di confronto (6), caratterizzato da  $\psi$ , viene in seguito denominato come solido di confronto tipo Raniecki.

*Dimostrazione*<sup>2</sup>

Posto  $\Theta = \Delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}[\mathbf{D}_1] - \Delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}[\mathbf{D}_2] - \Delta \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}^r[\Delta \mathbf{D}]$ , si deve provare che  $\Theta \geq 0$ . Occorre esaminare i seguenti quattro casi:

- caso a)  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_1] \leq 0$  e  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_2] \leq 0$ .

In tale caso risulta:

$$\Theta = \frac{1}{4 \psi q} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}[\Delta \mathbf{D}] \right)^2 \geq 0, \quad (3.9)$$

dove  $q = H_0 + H$ .

- caso b)  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_1] \geq 0$  e  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_2] \geq 0$ .

In tale caso risulta:

$$\Theta = \frac{1}{4 \psi q} \left( \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\Delta \mathbf{D}] - \psi \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\Delta \mathbf{D}] \right)^2 \geq 0. \quad (3.10)$$

- caso c)  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_1] > 0$  e  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_2] \leq 0$ .

In tale caso risulta:

$$\Theta = \frac{\psi}{q} \left[ \left( \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_2] - \frac{1}{2\psi} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\Delta \mathbf{D}] + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\Delta \mathbf{D}] \right)^2 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_1] \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_2] \right] > 0. \quad (3.11)$$

---

<sup>2</sup>La dimostrazione è dovuta a Raniecki (1979).

- caso d)  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_1] \leq 0$  e  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_2] > 0$ .

In tale caso risulta:

$$\Theta = \frac{\psi}{q} \left[ \left( \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_1] + \frac{1}{2\psi} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}[\Delta \mathbf{D}] - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\Delta \mathbf{D}] \right)^2 - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_1] \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}_2] \right] > 0. \quad (3.12)$$

Il teorema resta quindi provato. ■

Muovendo dalla condizione (3) e tenendo presente il teorema di confronto (5), può essere formulata quindi la seguente condizione sufficiente di unicità per il problema incrementale del solido elastoplastico (senza ipotesi restrittive sulla entità delle rotazioni e delle deformazioni):

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{C}}^r[\mathbf{L}] > 0, \quad (3.13)$$

per tutti i campi di velocità che soddisfano condizioni omogenee sul contorno vincolato. La (13) è stata derivata da Raniecki (1979) (cfr. Raniecki e Bruhns 1981) come estensione della condizione di Hill (1958, 1959, 1961) alla plasticità con legge di flusso non associata. Nel caso di legge di flusso associata, assumendo  $\psi = 1$ , la (13) si riduce alla condizione di Hill. Impiegando la relazione  $\tilde{\mathbf{C}}^r - \mathbf{C}^r = \tilde{\mathbf{C}}^h - \mathbf{C}^h$  e ricordando il legame (3.8.8) tra tensore costitutivo  $\tilde{\mathbf{C}}^h$  e  $\mathbf{C}^h$ , la (13) può essere messa nella forma:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}^r[\mathbf{D}] - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \cdot \left[ 2 \mathbf{D} \mathbf{D} - \mathbf{L}^T \mathbf{L} \right] > 0. \quad (3.14)$$

Nella (14) il primo integrale è direttamente collegato (tramite  $\mathbf{C}^r$ ) alla risposta incrementale del materiale, mentre il secondo è legato allo stato tensionale del corpo e alla sua geometria.

Un solido di confronto complementare a quello di Raniecki è quello caratterizzato dal tensore costitutivo  $\mathbb{C}^h$ , che viene nel seguito indicato come "solido di confronto tipo Hill". La condizione sufficiente di unicità della risposta incrementale di tale solido è data dal soddisfacimento, per ogni campo di velocità corrispondente a condizioni omogenee sul contorno  $\partial\mathcal{B}_v$ , della disuguaglianza:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbb{C}}^h[\mathbf{L}] > 0. \quad (3.15)$$

Dal punto di vista del solido elastoplastico reale, il soddisfacimento della (15) implica che non sono possibili perdite di unicità corrispondenti a carico plastico in tutto il corpo. Anche quando la (15) cessa di valere, non è detto peraltro che il campo di velocità che annulla l' integrale sia effettivamente ammissibile e quindi rappresenti una effettiva possibilità di perdita di unicità per il solido elastoplastico<sup>3</sup>.

#### 5.4 UNA CONDIZIONE LOCALE DI UNICITÀ

Una condizione locale sufficiente a garantire la validità del criterio integrale sufficiente di unicità (3.13) risulta:

$$\mathbf{X} \cdot \tilde{\mathbb{C}}^r[\mathbf{X}] > 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \text{Lin}-\{0\}, \quad (4.1)$$

ovvero, in ogni punto del corpo deve essere definibile almeno un

---

<sup>3</sup> E' importante precisare che la (15) individua un limite INFERIORE alle possibili perdite di unicità sotto forma di modi biforcati corrispondenti a carico plastico. Raniecki e Bruhns (1981) si riferiscono alla (15) come ad un "upper bound" per la biforcazione elastoplastica, tale riferimento appare pertanto essenzialmente scorretto.

solido di confronto di Raniecki il cui tensore costitutivo  $\tilde{C}^r$  risulti definito positivo<sup>4</sup>.

*Nell' ambito della teoria infinitesima il secondo integrale al primo membro della (3.14) è trascurabile rispetto al primo. In tale caso, si ottiene la analoga condizione locale sufficiente di unicità:*

$$X \cdot C^r[X] > 0, \quad \forall X \in \text{Sym} - \{0\}, \quad (4.2)$$

ovvero, in ogni punto del corpo deve essere definibile almeno un solido di confronto di Raniecki il cui tensore costitutivo  $C^r$  risulti definito positivo (si noti che la (2) differisce dalla (1) per la scelta del tensore costitutivo che, nel caso della (1), contiene anche i termini "geometrici").

- *Proposizione 2:*

*La perdita di definitezza positiva dell' intera famiglia di tensori  $C^r$  avviene in corrispondenza dello stesso valore critico del modulo di incrudimento e della stessa deformazione critica che corrispondono alla perdita di definitezza positiva del tensore  $C^h$ :*

$$\left\{ \exists \psi : X \cdot C^r[X] > 0, \quad \forall X \in \text{Sym} - \{0\} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ X \cdot C^h[X] > 0, \quad \forall X \in \text{Sym} - \{0\} \right\}. \quad (4.3)$$

---

<sup>4</sup>La (1) risulta essere una condizione analoga alla condizione introdotta da Hill (1957) nell' ambito della elasticità finita. Sempre in tale ambito, la (1), se  $X$  è ristretto a  $\text{Sym}$ , è equivalente alla condizione  $GCN^+$  (Truesdell e Noll 1965, Sects. 52, 68).

*Dimostrazione:*<sup>5</sup>

Dalla definizione (3.6) risulta:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{C}^r[\mathbf{X}] = \mathbf{X} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}] - \frac{(\mathbf{X} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{R}])^2}{4\psi (H_0 + H)} = \frac{4\psi q \mathbf{X} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}] - (\mathbf{X} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{R}])^2}{4\psi q}. \quad (4.4)$$

Essendo  $\mathbb{E}$  definito positivo, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz può essere scritta come:

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}])^2 \leq (\mathbf{R} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{R}])(\mathbf{X} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}]). \quad (4.5)$$

Dalla (4) si ottiene:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{C}^r[\mathbf{X}] \geq \frac{4\psi q - \mathbf{R} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{R}]}{4\psi q} \mathbf{X} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}], \quad \forall \mathbf{X} \in \text{Sym}\{-\mathbf{0}\}. \quad (4.6)$$

Essendo  $\psi \in \mathbb{R}^+$  e  $q > 0$ , dalla (6) si ricava:

$$q > q_{cr} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{R}]}{4\psi} \Rightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{C}^r[\mathbf{X}] > 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \text{Sym}\{-\mathbf{0}\}. \quad (4.7)$$

Se  $q = q_{cr}$  è facile verificare che  $\mathbf{X}^0 \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}^0] = 0$  per  $\mathbf{X}^0 = \mathbf{R}$ . Allora il valore  $q_{cr}$  rappresenta la soglia, in termini di un valore "critico" del modulo plastico, della perdita della definitezza positiva del tensore  $\mathbf{C}^r$  per il generico solido  $\psi$ . Tra tutti i solidi di confronto, occorre determinare quello corrispondente al valore più piccolo di  $q_{cr}$ , cioè:

$$q_{cr}^w = \min_{\psi} q_{cr}(\psi). \quad (4.8)$$

Derivando  $q_{cr}$  rispetto a  $\psi$  e imponendo l'uguaglianza a zero, si

---

<sup>5</sup>Tale dimostrazione, dovuta a Raniecki (1979), viene qui presentata in una forma equivalente.

ottiene il valore di  $\psi$  corrispondente al minimo (8):

$$\psi^w = \sqrt{\frac{P \cdot E[P]}{Q \cdot E[Q]}} \quad (4.9)$$

Sostituendo tale valore  $\psi^w$  nella espressione di  $q_{cr}$  e ricavando H, si ottiene lo stesso valore, in termini di modulo di incrudimento, corrispondente alla perdita di definitezza positiva del tensore  $C^h$  (cfr. § 3.9, prop. 2). Anche la velocità di deformazione critica  $X^0$  (corrispondente a  $\psi^w$ ), risulta uguale alla velocità di deformazione critica  $D^w$  per il tensore costitutivo  $C^h$  (cfr. § 3.9.12).<sup>6</sup> ■

*Osservazioni:*

- Avendo assunta la definitezza positiva del tensore costitutivo elastico  $E$ , la condizione di perdita di definitezza positiva del tensore costitutivo  $C^h$  coincide con la condizione di perdita di

<sup>6</sup> Lo stesso risultato poteva essere ottenuto con un procedimento analogo a quello impiegato da Maier e Hueckel (1979) per determinare la perdita di definitezza positiva del lavoro del secondo ordine. La condizione di perdita di definitezza positiva di  $C^r$  si può ottenere infatti uguagliando a zero il minimo vincolato della funzione:

$$\min_x \{X \cdot E[X] - X \cdot E[R]\}, \text{ soggetto a } q - X \cdot E[R] = 0.$$

Ci si riduce al problema non vincolato:

$$\min_x \{X \cdot E[X] - X \cdot E[R] - \omega (q - X \cdot E[R])\} = 0,$$

dove  $\omega$  è un moltiplicatore di Lagrange; derivando si ottengono le condizioni di estremo:

$$2 E[X] - E[R] - \omega E[R] = 0,$$

$$q - X \cdot E[R] = 0,$$

che accanto alla condizione di annullamento del minimo:

$$X \cdot E[X] - X \cdot E[R] = 0,$$

permettono di ritrovare il valore  $q_{cr}$ .

definitezza positiva del tesore costitutivo elastoplastico incrementale  $\mathbb{C}$ . Infatti, fino al valore critico del modulo di incrudimento  $H_{cr}^w$ ,  $\mathbb{C}$  risulta sicuramente definito positivo. Quando  $H = H_{cr}^w$ , se la velocità critica  $D^w$  per  $\mathbb{C}^h$ , corrisponde alla condizione di scarico elastico,  $-D^w$  sicuramente corrisponde a carico plastico e quindi è la velocità di deformazione critica per il solido  $\mathbb{C}$ .

La osservazione precedente, assieme alla proposizione 2' conduce alla formulazione del seguente principio di esclusione, valido solo nell' ambito della teoria infinitesima:

*La soluzione incrementale di un generico problema al contorno è unica quando in ogni punto del solido (elastoplastico) il tensore costitutivo  $\mathbb{C}$  risulta definito positivo.*

*Osservazioni:*

- Nel caso della legge di flusso associata il principio di esclusione precedentemente formulato si riduce al teorema di Melan (1938): "(nell' ambito della teoria infinitesima) in presenza di incrudimento positivo (e legge di flusso associata) la soluzione incrementale di un generico problema al contorno è unica"<sup>7</sup>.

## 5.5 IL CASO DEGLI STATI PIANI DI TENSIONE E DI DEFORMAZIONE

La condizione sufficiente di unicità nella forma integrale (3.14) può essere immediatamente particolarizzata ai casi piani di tensione e deformazione se si escludono perdite di unicità in modi biforcati che violano il vincolo di stato piano.

---

<sup>7</sup>La dimostrazione di Melan (1938) è stata ripresa e formulata in via più generale da Hill (1950, pp. 53-60).

Nel caso di stato piano di sforzo, il tensore  $\mathbb{C}^r$  nella (3.14) diventa:

$$\mathbb{C}^r = \mathbb{C} - \frac{1}{4\psi(H + \bar{H}_o)} \mathbb{C}[\bar{\mathbf{R}}] \otimes \mathbb{C}[\bar{\mathbf{R}}], \quad (5.1)$$

dove  $\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{P}} + \psi\bar{\mathbf{Q}}$  è la restrizione a  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  del tensore  $\mathbf{R}$  definito dalla (3.7).

Nel caso di stato piano di deformazione, il tensore  $\mathbb{C}^r$  nella (3.14) diventa:

$$\bar{\mathbb{C}}^r = \bar{\mathbb{E}} - \frac{\bar{\mathbf{N}}^r \otimes \bar{\mathbf{N}}^r}{4\psi(H + H_o)}, \quad (5.2)$$

dove  $\bar{\mathbf{N}}^r$  è definito come la restrizione ad  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  del tensore:

$$\mathbf{N}^r = \mathbb{E}[\mathbf{R}] = \mathbf{M} + \psi \mathbf{N}. \quad (5.3)$$

Nel caso dello stato piano di sforzo la proposizione 2 del § 5.4 si esprime come:

*Proposizione 3:*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbb{C}^h[\bar{\mathbf{X}}] > 0, \quad \forall \bar{\mathbf{X}} \in \text{Sym}-\{0\} \text{ in tutti i punti del corpo} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{unicità del problema incrementale} \\ \text{(nella teoria infinitesima)} \end{aligned}$$

La dimostrazione è formalmente identica alla dimostrazione della proposizione 2 del § 5.4, salvo il fatto che tutte le grandezze sono ristrette ad  $\mathbb{R}^2$ .

Nel caso dello stato piano di deformazione la proposizione 2 del § 5.4 si esprime, in modo analogo, come:

*Proposizione 4:*

$\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^h[\bar{\mathbf{X}}] > 0, \forall \bar{\mathbf{X}} \in \text{Sym}-\{0\}$  in tutti i punti del corpo  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  unicità del problema incrementale  
 (nella teoria infinitesima)

*Dimostrazione*<sup>8</sup>:

Per dimostrare la proposizione 4 è sufficiente dimostrare la coincidenza nella perdita di definitezza positiva del tensore  $\bar{\mathbf{C}}^h$  con la perdita di definitezza positiva del solido di confronto ottimale, ovvero:

$$\exists \psi : \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^r[\bar{\mathbf{X}}] > 0, \forall \bar{\mathbf{X}} \in \text{Sym}-\{0\} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{C}}^h[\bar{\mathbf{X}}] > 0, \forall \bar{\mathbf{X}} \in \text{Sym}-\{0\}. \quad (5.4)$$

Il modulo plastico critico corrispondente alla perdita di definitezza positiva del tensore  $\bar{\mathbf{C}}^r$  può essere determinato tramite la soluzione del seguente problema di minimo vincolato:

$$\bar{\mathbf{X}} \in \text{Sym} \left[ \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{E}}[\bar{\mathbf{X}}] - \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{N}}^r \right], \quad (5.5)$$

soggetto a:

$$\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{N}}^r = 4 \psi q, \quad (5.6)$$

ove  $q = H + H_0$ .

Il minimo del problema (5-6) equivale al minimo non vincolato

---

<sup>8</sup> La dimostrazione non è banale perchè la condizione di deformazione plana introdotta nel Cap. 4 non rappresenta una semplice restrizione ad  $\mathbb{R}^2$  delle grandezze introdotte nel legame tridimensionale.

della funzione:

$$\mathcal{L} = \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{E}}[\bar{\mathbf{X}}] - \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{N}}^r + \omega [\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{N}}^r - 4\psi q], \quad (5.7)$$

dove  $\omega$  è il moltiplicatore di Lagrange. Le condizioni di estremo risultano:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = 2 \bar{\mathbf{E}}[\bar{\mathbf{X}}] - (1 - \omega) \bar{\mathbf{N}}^r = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{N}}^r - 4\psi q = 0. \quad (5.9)$$

Dalla (8) si ricava:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{2} (1 - \omega) \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}^r], \quad (5.10)$$

dove  $\mathcal{E} = (\bar{\mathbf{E}})^{-1}$  (cfr. § 4.5). La (10), sostituita nella (9), fornisce il valore del moltiplicatore di Lagrange:

$$\omega = \frac{\bar{\mathbf{N}}^r \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}^r] - 8\psi q}{\bar{\mathbf{N}}^r \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}^r]}. \quad (5.11)$$

Sostituendo le (10) e (11) nella (7) ed imponendo l'uguaglianza a zero si ottiene il modulo plastico critico per la perdita di definitezza positiva del tensore  $\bar{\mathbf{C}}^r$ :

$$q_{cr}(\psi) = \frac{\bar{\mathbf{N}}^r \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}^r]}{4\psi}. \quad (5.12)$$

Occorre quindi individuare il solido di confronto "ottimale", ovvero risolvere il problema di minimo:

$$q_{cr}^r = \min_{\psi} q(\psi). \quad (5.13)$$

Il valore di  $\psi$  che risolve la (13) è:

$$\psi^w = \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{M}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{M}}]}{\bar{\mathbf{N}} \cdot \mathcal{E}[\bar{\mathbf{N}}]}} , \quad (5.14)$$

che, sostituito nella (12), fornisce un valore del modulo plastico critico uguale a quello corrispondente alla perdita di definitezza positiva del tensore  $\bar{\mathbf{C}}^h$  (4.5.1). Sostituendo le (11), (12) e (14) nella (10), si ottiene la stessa velocità di deformazione critica (4.5.2) per il tensore  $\bar{\mathbf{C}}^r$  ■

## Capitolo 6

# STABILITA` ELASTOPLASTICA

### 6.1 INTRODUZIONE

In questo Capitolo vengono presentate e discusse la condizione sufficiente di stabilità formulata da Hill (1958, 1959, 1961) e la condizione di stabilità infinitesima (Truesdell e Noll 1965, Sect. 68 bis, Ogden 1984, Sect. 6.2.3). Vengono inoltre presentate le condizioni necessarie per la stabilità infinitesima ricavate da Ryzhak (1987) estendendo al caso elastoplastico il teorema di stabilità di Hadamard, dimostrato da Cattaneo<sup>1</sup> (1946). Vengono infine studiate le condizioni di perdita della condizione di ellitticità forte per i solidi di confronto di Hill e Raniecki. Si dimostra, in particolare (Bigoni e Zaccaria 1990, 1991), che la perdita di ellitticità forte avviene allo stesso valore del modulo di incrudimento per i solidi di confronto di Hill e di Raniecki (ottimale). Impiegando la soluzione esplicita per la localizzazione della deformazione ottenuta da Bigoni e Hueckel (1989 b, 1990 b, cfr. § 7.5), si perviene infine ad una espressione analitica della condizione di perdita di ellitticità forte (Bigoni e Zaccaria 1990, 1991).

---

<sup>1</sup>Una dimostrazione diversa del teorema di Hadamard è dovuta a Noll (Truesdell e Noll 1965, pp. 253-254).

## 6.2 STABILITÀ ELASTOPLASTICA

Un criterio sufficiente per la stabilità incrementale del problema al contorno elastoplastico è stato proposto da Hill (1958), estendendo un criterio originariamente proposto da Pearson (1956) nel caso elastico. Il criterio può essere formulato come segue (Hill 1958):

*Condizione sufficiente affinché una configurazione di equilibrio di un corpo elasto(plastico) risulti stabile e che, per una qualunque perturbazione cinematicamente ammissibile del moto, l'incremento di energia cinetica sia negativo in un intervallo di tempo sufficientemente piccolo.*

Per perturbazione cinematicamente ammissibile del moto si intende un qualunque moto derivante dalla imposizione di un campo iniziale di velocità  $\mathbf{v}_0$ , nullo sulla parte di contorno  $\partial\mathcal{B}_{ov}$  ove sono assegnati gli spostamenti. Pertanto, al generico istante del moto, il campo di velocità  $\mathbf{v}(t)$  deve risultare nullo su  $\partial\mathcal{B}_{ov}$ .

Moltiplicando scalarmente la equazione del moto (2.4.2) per il vettore  $\mathbf{v}(t)$  si ottiene:

$$(\operatorname{div}\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} , \quad (2.1)$$

che, per la simmetria di  $\mathbf{T}$ , può essere riscritta nella forma:

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} . \quad (2.2)$$

Integrando la (2) sulla generica parte  $\mathcal{P}$  del solido, nella configurazione  $\mathcal{B}$ , utilizzando il teorema della divergenza ed il principio di conservazione della massa, si ottiene l'equazione di bilancio della energia meccanica:

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}}_{\text{potenza dissipata dalle forze esterne}} = \dot{\kappa} + \underbrace{\int_{\mathcal{P}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}}_{\text{potenza interna}}, \quad (2.3)$$

dove:

$$\dot{\kappa} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2, \quad (2.4)$$

rappresenta la variazione di energia cinetica. Nella descrizione lagrangiana la (3), scritta per l'intero volume nella configurazione di riferimento  $\mathcal{B}_0$ , diventa:

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}} + \int_{\partial \mathcal{B}_{0s}} \mathbf{f}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}} = \dot{\kappa} + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}, \quad (2.5)$$

dove  $\mathbf{f}_0$  rappresenta la forza applicata sulla parte di contorno  $\partial \mathcal{B}_{0s} = \partial \mathcal{B}_0 \cap \partial \mathcal{B}_{0v}$  e:

$$\dot{\kappa} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{x}}^2. \quad (2.6)$$

Poichè  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{f}_0$  ed  $\mathbf{S}_0$  rappresentano forze e tensioni in equilibrio nella configurazione  $\mathcal{B}_0$ , una applicazione del teorema della divergenza è sufficiente a mostrare che la (2.5) implica  $\dot{\kappa} = 0$  all'istante iniziale del moto. Quindi la energia cinetica ha un estremo all'istante iniziale. La condizione di stabilità è equivalente alla richiesta che questo estremo corrisponda ad un massimo relativo, ovvero:

$$\left( \ddot{\kappa} \right)_{t=0} < 0. \quad (2.7)$$

Dalla (5), nell'ipotesi di carichi morti ( $\dot{\mathbf{b}}_0 = 0$  e  $\dot{\mathbf{f}}_0 = 0$ ), si deduce:

$$\ddot{\mathbf{k}} = - \int_{\mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \left[ - \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \ddot{\mathbf{F}} + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{b}_0 \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \int_{\partial \mathcal{B}_{0s}} \mathbf{f}_0 \cdot \ddot{\mathbf{x}} \right]. \quad (2.8)$$

Il teorema della divergenza assicura ancora che, al tempo iniziale, il termine in parentesi nella (8) è nullo. Quindi la condizione di stabilità (7) si esprime come:

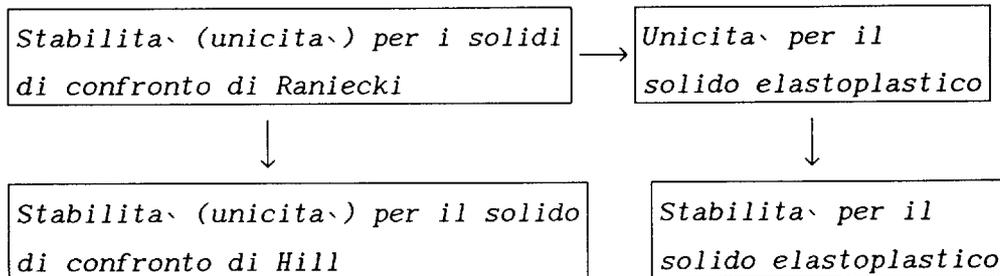
$$\int_{\mathcal{B}_0} \dot{\mathbf{S}}_0 \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{x}}_0 > 0, \quad (2.9)$$

che deve essere soddisfatta per ogni campo  $\dot{\mathbf{x}}_0$  omogeneo sul contorno  $\partial \mathcal{B}_{0v}$  e con  $\dot{\mathbf{S}}_0$  corrispondente a  $\dot{\mathbf{x}}_0$  tramite le equazioni costitutive. Nella descrizione Lagrangiana relativa ed impiegando il legame costitutivo (3.8.7), la (9) diventa:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{C}}[\mathbf{L}] > 0, \quad (2.10)$$

per ogni campo  $\mathbf{L}$  corrispondente ad un campo  $\mathbf{v}_0$  (soddisfacente a condizioni omogenee su  $\partial \mathcal{B}_v$ ).

Nei solidi di confronto incrementalmente lineari di Hill e di Raniecki, la condizione di stabilità coincide con la condizione sufficiente di unicità. Se si confronta la condizione di stabilità (10) e le condizioni sufficienti di unicità per il solido elastoplastico (5.3.13) e per il solido di confronto di Hill (5.3.15), tenendo presente il teorema di confronto, si ottengono le seguenti implicazioni:



Le implicazioni inverse non valgono, quindi la soluzione del problema incrementale di un solido elastoplastico può non essere unica ma essere stabile.

Dalla (10) si può dedurre che la *definitezza positiva* del tensore  $\tilde{\mathbb{C}}$  rappresenta una condizione locale sufficiente alla stabilità.<sup>2</sup>

Nel caso della teoria infinitesima tale condizione coincide con la condizione locale di unicità (5.4.1, cfr. § 5.4, Prop. 2).

La condizione di *stabilità infinitesima* (Truesdell e Noll 1965, Sect. 68 bis, Ogden 1984, Sect. 6.2.3) equivale alla condizione di stabilità (10) in senso debole:

<sup>2</sup> Nell'ambito della teoria infinitesima tale condizione locale di stabilità è stata proposta da Mróz (1963, 1966) per una classe ristretta di leggi di flusso non associate, da Villaggio (1968) per un solido elastoplastico tipo Prandtl-Reuss, in seguito estesa da Hueckel e Maier (1977) e Maier e Hueckel (1979) a leggi di flusso non associate del tutto generali. In presenza di deformazioni finite tale condizione locale risulta essere fortemente restrittiva. Essa è discussa, nel caso della elasticità incrementale, in Ogden 1984, Sect. 6.2 e, nel caso della elastoplasticità non associata, in Raniecki e Bruhns (1981) e Runesson e Mróz (1989).

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{C}}[\mathbf{L}] \geq 0, \quad (2.11)$$

per ogni campo  $\mathbf{L}$  corrispondente ad un campo  $\mathbf{v}_0$  (soddisfacente a condizioni omogenee su  $\partial\mathcal{B}_v$ ).

### 6.3 UNA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA STABILITÀ INFINITESIMA

Nel caso della elasticità incrementale è possibile dimostrare (Hadamard 1903, Cattaneo 1946):

$$\text{Stabilità infinitesima} \Rightarrow \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^e(\mathbf{n})\mathbf{g} \geq 0, \quad \forall \mathbf{g}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

con:

$$\tilde{\mathbf{A}}^e(\mathbf{n})\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}]\mathbf{n}, \quad (3.2)$$

dove  $\tilde{\mathbf{A}}^e(\mathbf{n})$  rappresenta il  *tensore acustico*  (nella direzione  $\mathbf{n}$ ) ed  $\tilde{\mathbf{E}}$  è il tensore elastico che trasforma il gradiente della velocità nella derivata materiale del primo tensore di Piola-Kirchhoff. La (1) è nota come teorema di Hadamard e per la sua validità si richiede ad  $\tilde{\mathbf{E}}$  di essere una trasformazione lineare  $\text{Lin} \rightarrow \text{Lin}$  e quindi il teorema risulta applicabile anche ai tensori  $\tilde{\mathbf{C}}^h$  e  $\tilde{\mathbf{C}}^r$  che caratterizzano i solidi di confronto:

$$\boxed{\text{Stabilità infinitesima per il solido di confronto di Hill}} \Rightarrow \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^h(\mathbf{n})\mathbf{g} \geq 0, \quad \forall \mathbf{g}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad (3.3)$$

$$\boxed{\text{Stabilità infinitesima per i solidi di confronto di Raniecki}} \Rightarrow \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^r(\mathbf{n})\mathbf{g} \geq 0, \quad \forall \mathbf{g}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

dove:

$$\tilde{\mathbf{A}}^h(\mathbf{n})\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{C}}^h[\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}]\mathbf{n} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{A}}^r(\mathbf{n})\mathbf{g} = \tilde{\mathbf{C}}^r[\mathbf{g}\otimes\mathbf{n}]\mathbf{n}.$$

Nel caso dei solidi elastoplastici il teorema di Hadamard è stato generalizzato da Ryzhak (1987):

*Proposizione 1 (teorema di Ryzhak):*

$$\boxed{\text{Stabilità infinitesima per il solido elasto-plastico}} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^h(\mathbf{n})\mathbf{g} \geq 0, \quad \forall \mathbf{g}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^e(\mathbf{n})\mathbf{g} \geq 0, \quad \forall \mathbf{g}, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.5)$$

*Dimostrazione:*

Si suppone che i tensori  $\tilde{\mathbf{E}}$  ed  $\tilde{\mathbf{C}}^h$  siano funzioni continue del punto. Si assume che la (5)<sub>1</sub> sia violata in un punto  $\mathbf{x}_0$ , per due vettori  $\mathbf{g}$  ed  $\mathbf{n}$  corrispondenti a carico plastico:

$$\exists \mathbf{x}_0 \in \mathcal{B}, \exists \mathbf{g}, \mathbf{n} (|\mathbf{g}|=|\mathbf{n}|=1) : \mathbf{g}\otimes\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_0}^h(\mathbf{n})\mathbf{g} < 0, \quad (3.6)$$

dove  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_0}^h$  indica il valore del campo  $\tilde{\mathbf{A}}^h$  nel punto  $\mathbf{x}_0$ . L'ipotesi di continuità di  $\tilde{\mathbf{C}}^h$  nel punto permette di affermare che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 : \bar{S}(2\rho) \subseteq \mathcal{B}, \mathbf{x}_0 \in \bar{S}(2\rho), \forall \mathbf{x} \in \bar{S}(2\rho), \forall \mathbf{L} \in \text{Lin}:$$

$$\mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}^h[\mathbf{L}] \leq \mathbf{L} \cdot \left[ \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_0}^h + \varepsilon \mathbf{0} \right] [\mathbf{L}], \quad (3.7)$$

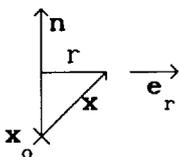
dove  $\bar{S}(2\rho)$  è la chiusura della sfera  $S(2\rho)$ , di raggio  $2\rho$ .

La chiusura di una sfera di raggio  $\rho$  concentrica alla prima appartiene necessariamente all'interno di  $\mathcal{B}$  ed in essa valgono la

(7) e la (6). Per  $\varepsilon < |\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_0}^h \mathbf{g}|$  vale inoltre la seguente disuguaglianza:

$$\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \cdot \left[ \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_0}^h + \varepsilon \mathbb{I} \right] [\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}] < 0. \quad (3.8)$$

Assumendo un sistema di coordinate cilindriche, con origine nel centro della sfera di raggio  $\rho$  e con asse  $z$  diretto secondo  $\mathbf{n}$ , risulta:

$$z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}, \quad r = \left( \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - z^2 \right)^{1/2}, \quad \mathbf{e}_r = \text{grad } r. \quad (3.9)$$


Siano  $\Omega_1$  il cono circolare retto, di base ( $z=0$  e  $r=\rho$ ) e vertice nel punto ( $z=\rho^2$ ,  $r=0$ ) ed  $\Omega_2$  il cono circolare retto di base ( $z=0$  e  $r=\rho$ ) e vertice nel punto ( $z=\rho$ ,  $r=0$ ). Se  $\rho < 1$  risulta  $\Omega_1 \supset \Omega_2$  e si definisce  $\Omega_3 = \Omega_2 - \Omega_1$ .

Si consideri il seguente campo continuo di velocità:

$$\mathbf{v} = \frac{1 - \rho}{\rho^2} z \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \left[ \rho - (z + r) \right] \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_3, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} - \Omega_2, \quad (3.12)$$

a cui corrisponde il seguente campo gradiente:

$$\mathbf{L} = \frac{1 - \rho}{\rho^2} \mathbf{g} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\rho} \mathbf{g} \otimes (\mathbf{n} + \mathbf{e}_r), \quad \mathbf{x} \in \Omega_3, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B} - \Omega_2. \quad (3.15)$$

Si noti che in  $\Omega_1$ , per  $\rho$  sufficientemente piccolo, grazie alla (6), risulta  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q} > 0$ , che può invece non essere verificata in  $\Omega_3$ . In corrispondenza del campo (13-15), la condizione di stabilità infinitesima (2.11) è violata. Infatti, posto:

$$\alpha = \max \left\{ \max_{\mathbf{x} \in \Omega_3, \mathbf{L}} \frac{\mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{C}}^h[\mathbf{L}]}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}, \max_{\mathbf{x} \in \Omega_3, \mathbf{L}} \frac{\mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{L}]}{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} \right\}, \quad (3.16)$$

e tenendo conto delle (7), (8), (13), (14) e (15), si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{C}}[\mathbf{L}] &= \int_{\Omega_1} \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{C}}^h[\mathbf{L}] + \int_{\Omega_3} \mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{C}}[\mathbf{L}] \leq \int_{\Omega_1} \mathbf{L} \cdot \left[ \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}_0}^h + \varepsilon \mathbb{I} \right] [\mathbf{L}] + \alpha \int_{\Omega_3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \\ &= \frac{\pi}{3} (1 - \rho)^2 (\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_0}^h(\mathbf{n}) \mathbf{g} + \varepsilon) + \frac{2}{3} \alpha \pi \rho^{-2} (\rho^3 - \rho^4) = \\ &= \frac{\pi}{3} (1 - \rho)^2 \left[ \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}_0}^h(\mathbf{n}) \mathbf{g} + \varepsilon + 2 \alpha \frac{\rho}{1 - \rho} \right] < 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

per  $\rho$  sufficientemente piccolo.

Nel caso  $\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} = 0$ , è sempre possibile scegliere due valori di  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{g}$  per i quali  $\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} > 0$ . Se  $\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} < 0$ , basta cambiare direzione ad uno dei due vettori  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{g}$  per riottenere il caso analizzato. Per dimostrare la (5)<sub>2</sub> è possibile impiegare un ragionamento del tutto analogo, salvo che nella (6) risulta  $\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} < 0$ . ■

Si noti che, nell' ipotesi che il tensore elastico  $\mathbf{E}$  sia definito positivo, la condizione significativa è la (5)<sub>1</sub> (a parte casi patologici, Cfr. Runesson e Mróz 1989).

Dal teorema di Ryzhak si deducono le seguenti condizioni necessarie per la stabilità infinitesima:

- *La semidefinitezza positiva di ogni<sup>3</sup> tensore acustico associato al solido di confronto tipo Hill e una condizione necessaria per la stabilità infinitesima del solido elastoplastico.*
- *La semidefinitezza positiva di ogni tensore acustico associato ad almeno un solido di confronto tipo Raniecki e una condizione necessaria per la validità della condizione integrale di unicità per il solido elastoplastico.*

Il valore critico del modulo di incrudimento per il quale si verifica la perdita di definitezza positiva dei tensori acustici dei solidi di confronto di Hill e di Raniecki, rappresenta la soglia per la violazione delle condizioni necessarie di stabilità. Se i tensori acustici associati ai solidi di confronto sono definiti positivi si dice che i relativi tensori costitutivi soddisfano la condizione di ellitticità forte:

$$\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^h(\mathbf{n}) \mathbf{g} > 0, \quad \forall \mathbf{g}, \mathbf{n} \neq 0, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^r(\mathbf{n}) \mathbf{g} > 0, \quad \forall \mathbf{g}, \mathbf{n} \neq 0. \quad (3.20)$$

#### 6.4 ELLITTICITÀ FORTE PER I SOLIDI DI CONFRONTO

Si determina di seguito, nell'ambito della teoria infinitesima, il modulo di incrudimento critico corrispondente alla perdita di ellitticità forte nei solidi di confronto di Hill

---

<sup>3</sup> al variare di  $\mathbf{n}$ .

e Raniecki. Si noti che tali valori critici del modulo di incrudimento risultano essere le soglie oltre le quali non sono più verificate le condizioni necessarie di stabilità. In particolare, il superamento della soglia (3.4) comporta la perdita della condizione sufficiente di unicità (5.3.13), mentre il superamento della soglia (3.5)<sub>1</sub> comporta la perdita della condizione sufficiente di stabilità (2.10) e di unicità (5.3.13) per il solido elastoplastico.

*Proposizione 1:*<sup>4</sup>

Nel solido di confronto tipo Hill, il modulo di incrudimento critico (per la perdita di ellitticità forte), fissato il versore  $\mathbf{n}$ , risulta:

$$H^h(\mathbf{n}) = -H_0 + \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} + \left[ \left( \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \right) \left( \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{A}_e(\mathbf{n})$  è il tensore acustico elastico definito dalla  $\mathbf{A}_e(\mathbf{n})\mathbf{g} = \mathbb{E}[\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}]\mathbf{n}$ . I due vettori della diade  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{g}^h$  in corrispondenza della quale si ha la perdita di ellitticità forte, risultano legati dalla relazione:

$$\mathbf{g}^h = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} + \eta \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} \right\}, \quad (4.2)$$

dove:

---

<sup>4</sup>Bigoni e Zaccaria (1990, 1991).

$$\eta = \left[ \frac{\mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n}}{\mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n}} \right]^{1/2}. \quad (4.3)$$

Si noti che nel caso della plasticità associata la condizione (1) si riduce alla condizione di localizzazione della deformazione in una banda piana di normale  $\mathbf{n}$  (cfr. § 7).

*Dimostrazione:*

In analogia con la procedura impiegata da Maier ed Hueckel (1979) per dimostrare la Prop. 2 del § 3.9, è possibile ottenere la (1) imponendo l'uguaglianza a zero del minimo della funzione:

$$S(\mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_e(\mathbf{n}) \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n}, \quad (4.4)$$

soggetto al vincolo:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} = H + H_0. \quad (4.5)$$

Il problema di minimo vincolato (4-5) può essere risolto tramite la minimizzazione della funzione libera:

$$\mathcal{L}(\mathbf{g}, \eta) = S(\mathbf{g}) - \eta (\mathbf{g} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} - H - H_0). \quad (4.6)$$

Le condizioni di estremo e l'annullamento del minimo della funzione risultano:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \mathbf{A}_e(\mathbf{n})\mathbf{g} - \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} - \eta \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} = 0, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} - H - H_0 = 0, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_e(\mathbf{n})\mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} = 0. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Dalla (7) si ottiene la (2) che, sostituita nella (9), porge la (3). Infine, sostituendo le (2) e (3) nella (8) si ottiene la (1).

■

Il modulo di incrudimento critico risulta quindi il massimo valore assunto dalla (1) al variare della direzione  $\mathbf{n}$ :

$$H_{SE}^h = \max_{\mathbf{n}} H^h(\mathbf{n}), \quad \text{soggetto a } \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (4.10)$$

Si esaminano ora i solidi di confronto tipo Raniecki.

*Proposizione 2:*<sup>5</sup>

Nel generico solido di confronto tipo Raniecki (assegnato cioè  $\psi$ ), il modulo di incrudimento critico (per la perdita di ellitticità forte), fissato il versore  $\mathbf{n}$ , risulta:

$$H^r(\mathbf{n}, \psi) = -H_0 + \frac{1}{2} \left\{ \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} + \frac{\psi}{2} \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} + \frac{1}{2\psi} \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \right\}, \quad (4.11)$$

La relazione tra i vettori  $\mathbf{g}^r$  ed  $\mathbf{n}$ , che corrispondono alla perdita di ellitticità forte del solido  $\mathbb{C}^r$ , risulta:

$$\mathbf{g}^r = \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{R}]\mathbf{n}. \quad (4.12)$$

---

<sup>5</sup>Bigoni e Zaccaria (1990, 1991).

La dimostrazione è identica a quella impiegata per la Prop. 1. Il moltiplicatore di Lagrange  $\eta$  risulta ora uguale ad 1.

Il modulo di incrudimento critico del generico solido di confronto si ottiene rendendo massima la (11) in funzione di  $\mathbf{n}$ . Infine si determina l'estremo inferiore rispetto a  $\psi$ , ottenendo il modulo di incrudimento critico per il solido ottimale di confronto:

$$H_{SE}^r = \inf_{\psi} \max_{\mathbf{n}} H^r(\mathbf{n}, \psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (4.13)$$

## 6.5 COINCIDENZA DELLA PERDITA DI ELLITTICITÀ FORTE NEI DUE SOLIDI DI CONFRONTO

Fissato un versore  $\mathbf{n}$ , il solido ottimale tipo Raniecki, perde ellitticità forte per lo stesso valore critico del modulo di incrudimento per il quale, nella direzione  $\mathbf{n}$ , perde ellitticità forte il solido di confronto tipo Hill. Infatti, fissato  $\mathbf{n}$ , il minimo della (4.11) (rispetto a  $\psi$ ) si ottiene in corrispondenza del valore  $\psi = \eta$ , con  $\eta$  dato dalla (4.3). Sostituendo tale valore di  $\psi$  nella (4.11), si riottiene la (4.1).

Il problema della perdita di ellitticità forte nel solido di confronto tipo Hill si può quindi esprimere nella forma:

$$H_{SE}^h = \max_{\mathbf{n}} \min_{\psi} H^r(\mathbf{n}, \psi), \quad \psi \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (5.1)$$

D'altra parte l'analogo problema per il solido di confronto ottimale tipo Raniecki è espresso nella forma duale (4.13).

*Proposizione 3<sup>6</sup>:*

I problemi (4.13) e (1) hanno la stessa soluzione:

$$\inf_{\psi} \max_{\mathbf{n}} H^r(\mathbf{n}, \psi) = \min_{\psi} \max_{\mathbf{n}} H^r(\mathbf{n}, \psi) = \max_{\mathbf{n}} \min_{\psi} H^r(\mathbf{n}, \psi), \quad (5.2)$$

ovvero esiste il minimo in  $\mathbb{R}^+$  della funzione  $H^r(\psi) = \max_{\mathbf{n}} H^r(\mathbf{n}, \psi)$  e tale minimo coincide con  $H_{SE}^h$ .

*Dimostrazione:*

Sia  $L$  la funzione definita come:

$$L: \mathcal{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{m}, \varphi) \mapsto L(\mathbf{m}, \varphi) = H^r(\mathbf{n}, e^\varphi), \quad (5.3)$$

dove  $H^r$  è definito dalla (4.11) e:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, m_i = n_i^2 \ (i = 1, 2, 3) \right\}. \quad (5.4)$$

Può essere facilmente verificato che:

- 1)  $\mathcal{C}$  è chiuso, limitato, convesso e non vuoto;
- 2)  $\forall \varphi \in \mathbb{R}, \mathbf{m} \mapsto L(\mathbf{m}, \varphi)$  è concava<sup>7</sup> e continua;

<sup>6</sup>Bigoni e Zaccaria (1990, 1991).

<sup>7</sup>Nel seguito si dimostra la concavità della funzione  $\mathbf{m} \mapsto L_\varphi(\mathbf{m}) = L(\mathbf{m}, \varphi)$ , che risulta:

$$L_\varphi(\mathbf{m}) = \frac{G}{2\psi} \left( 2 R_i^2 m_i - \frac{1}{1-\nu} (R_i m_i)^2 + \frac{2\nu}{1-\nu} (R_i m_i) \operatorname{tr} \mathbf{R} + \frac{\nu^2}{(1-\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr}^2 \mathbf{R} \right) - 2G \left( P_i Q_i + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \mathbf{P} \operatorname{tr} \mathbf{Q} \right),$$

dove gli indici (sommati) indicano le componenti nel sistema di riferimento principale e la dipendenza da  $\varphi$  si esplica attraverso  $\mathbf{R}$ . La condizione di concavità richiede:

3)  $\forall \mathbf{m} \in \mathcal{C}$ ,  $\varphi \mapsto L(\mathbf{m}, \varphi)$  è convessa e continua;

4)  $\exists \mathbf{m}_0 \in \mathcal{C}$  tale che:

$$\lim_{|\varphi| \rightarrow \infty} L(\mathbf{m}_0, \varphi) = +\infty. \quad (5.5)$$

Allora, per il teorema di Ky Fan - Sion (cfr. Ekeland e Temam 1976, pp. 171-174), la funzione  $L$  possiede almeno un punto sella  $(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\varphi}) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}$  e:

$$L(\bar{\mathbf{m}}, \bar{\varphi}) = \min_{\varphi \in \mathbb{R}} \max_{\mathbf{m} \in \mathcal{C}} L(\mathbf{m}, \varphi) = \max_{\mathbf{m} \in \mathcal{C}} \min_{\varphi \in \mathbb{R}} L(\mathbf{m}, \varphi). \quad (5.6)$$

Dalla definizione (3) di  $L$  si deduce infine:

$$H_{SE}^h = H_{SE}^r. \quad (5.6)$$

■

*Pertanto la perdita di ellitticità forte nel solido di confronto di Hill e nel solido di Raniecki ottimale avviene in corrispondenza dello stesso valore critico del modulo di incrudimento.*

$$L_{\varphi} \left( \alpha \mathbf{m}' + (1-\alpha) \mathbf{m}'' \right) - \alpha L_{\varphi}(\mathbf{m}') - (1-\alpha) L_{\varphi}(\mathbf{m}'') \geq 0,$$

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall \mathbf{m}', \mathbf{m}'' \in \mathcal{C},$$

che diventa:

$$\frac{1}{1-\nu} \alpha (1-\alpha) (R_{11} \mathbf{m}' - R_{11} \mathbf{m}'')^2 \geq 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

condizione che risulta essere senz'altro soddisfatta.

## 6.6 VALUTAZIONE ESPLICITA DELLA SOGLIA DI PERDITA DELL' ELLITTICITÀ FORTE

Viene nel seguito risolto esplicitamente il problema di min-max (4.13)<sup>8</sup>. La soluzione che così si ottiene coincide con la soluzione del problema (4.10), come mostrato nel paragrafo precedente. Allo scopo di eseguire la massimizzazione in  $\mathbf{n}$ , la (4.11) è posta nella forma equivalente:

$$H^* + H_o^* = \mathbb{E}[\mathbf{R}]\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n})\mathbb{E}[\mathbf{R}]\mathbf{n}, \quad (6.1)$$

dove:

$$H^* = 4\psi H^r - \mathbf{P} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{P}] + 2\psi \mathbf{P} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Q}] - \psi^2 \mathbf{Q} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Q}], \quad (6.2)$$

$$H_o^* = \mathbf{R} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{R}]. \quad (6.3)$$

Si può notare che  $H^*$  nella (1) corrisponde al valore del modulo di incrudimento critico per la perdita di ellitticità forte in un solido elastoplastico fittizio con legge di flusso associata definita dal tensore  $\mathbf{R}$ . Nel caso di legge di flusso associata, il tensore costitutivo risulta simmetrico e la condizione di perdita di ellitticità forte coincide con la condizione di perdita di ellitticità. La condizione di perdita di ellitticità descrive peraltro il fenomeno della localizzazione della deformazione (Cfr. § 7.1). Come mostrato da Bigoni e Hueckel (1990 b, 1991 a Cfr. § 7.5) è possibile una soluzione esplicita per la condizione di perdita di ellitticità per solidi elastoplastici con legge di flusso associata (e non). Tale soluzione viene ora impiegata per ricavare il massimo della (1) in funzione di  $\mathbf{n}$ . Il valore massimo di  $H^*$  nella (1), in funzione di  $\psi$  risulta:

---

<sup>8</sup> Bigoni e Zaccaria (1990, 1991).

$$H^*(\psi) = \max_{k=1, 2, 3} H^*(\psi, k), \quad (6.4)$$

dove:

$$H^*(\psi, k) = -2G(1+\nu)R_k^2 - \frac{2G}{1-\nu} \left[ \frac{\langle \beta_1 \rangle}{\beta_1} (R_1 + \nu R_k) + \frac{\langle \beta_m \rangle}{\beta_m} (R_m + \nu R_k) \right]^2. \quad (6.5)$$

Nella (5) gli indici, non sommati, denotano le componenti rispetto alle direzioni principali del tensore  $R$ ,  $(k, l, m)$  è una permutazione di  $(1, 2, 3)$  ed infine:

$$\beta_1 = \frac{R_1 + \nu R_k}{R_m - R_1}, \quad \beta_m = \frac{R_m + \nu R_k}{R_1 - R_m}. \quad (6.6)$$

Le (6) sono valide ovviamente solo se  $R_m \neq R_1$  (si noti, tra l'altro, che vale la relazione  $\beta_1 + \beta_m = -1$ ). Nel caso  $R_m = R_1$  le (6) e le formule che seguono continuano a valere come limiti per  $\beta_1 \rightarrow +\infty$  e  $\beta_m \rightarrow -\infty$  o, equivalentemente,  $\beta_1 \rightarrow -\infty$  e  $\beta_m \rightarrow +\infty$ .

Le componenti del versore  $n$  corrispondenti a  $H^*(\psi, k)$  sono:

$$\begin{cases} n_k = 0, \\ n_1^2 = \langle 1 - \langle -\beta_m \rangle \rangle, \\ n_m^2 = \langle 1 - \langle -\beta_1 \rangle \rangle. \end{cases} \quad (6.7)$$

Riformulando il problema (4) in termini di  $H^r$  e rendendo esplicita la dipendenza da  $\psi$ , si ottiene:

$$H^r(\psi) = \max_{k=1, 2, 3} \left\{ \frac{G}{2} \left[ A\psi + \frac{B}{\psi} - 2C \right] \right\}, \quad (6.8)$$

dove:

$$A = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}^2 \mathbf{Q} - (1 + \nu) Q_k^2 - \frac{1}{1-\nu} \left[ \frac{\langle \beta_1 \rangle}{\beta_1} (Q_1 + \nu Q_k) + \frac{\langle \beta_m \rangle}{\beta_m} (Q_m + \nu Q_k) \right]^2, \quad (6.9)$$

$$B = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}^2 \mathbf{P} - (1 + \nu) P_k^2 - \frac{1}{1-\nu} \left[ \frac{\langle \beta_1 \rangle}{\beta_1} (P_1 + \nu P_k) + \frac{\langle \beta_m \rangle}{\beta_m} (P_m + \nu P_k) \right]^2, \quad (6.10)$$

$$C = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \mathbf{P} \text{tr} \mathbf{Q} - (1 + \nu) P_k Q_k + \frac{1}{1-\nu} \left[ \frac{\langle \beta_1 \rangle}{\beta_1} (P_1 + \nu P_k)(Q_1 + \nu Q_k) + \frac{\langle \beta_m \rangle}{\beta_m} (P_m + \nu P_k)(Q_m + \nu Q_k) \right]^2, \quad (6.11)$$

dove gli indici non sono sommati.

Si noti che i termini  $\langle \beta_m \rangle / \beta_m$  e  $\langle \beta_1 \rangle / \beta_1$ , funzioni di  $\psi$ , assumono solo i valori 0 ed 1. Pertanto, le funzioni A, B, C nella (8) sono indipendenti da  $\psi$  all' interno dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^+ + \{0\}$ :

$$I_{[0,1]} = \left\{ \psi \mid \langle \beta_1 \rangle = \langle \beta_m \rangle = 0 \right\}, \quad (6.12)$$

$$I_{(-\infty,0]}^1 = \left\{ \psi \mid \langle \beta_1 \rangle = \beta_1, \langle \beta_m \rangle = 0 \right\}, \quad (6.13)$$

$$I_{(-\infty,0]}^m = \left\{ \psi \mid \langle \beta_1 \rangle = 0, \langle \beta_m \rangle = \beta_m \right\}. \quad (6.14)$$

Si noti, dalle definizioni (6), che se  $\beta_1$  e  $\beta_m$  sono negativi, non possono risultare minori di -1. Quindi il significato dei simboli nelle (12-14) è fornito dalle seguenti implicazioni:

$$\psi \in I_{[0,1]} \Rightarrow -\beta_1, -\beta_m \in [0, 1] , \quad (6.15)$$

$$\psi \in I_{(-\infty,0]}^1 \Rightarrow -\beta_1 \in (-\infty, 0] , \quad (6.16)$$

$$\psi \in I_{(-\infty,0]}^m \Rightarrow -\beta_m \in (-\infty, 0] . \quad (6.17)$$

In conclusione, assegnato un particolare modello elastoplastico, il problema di massimo (4) si risolve agevolmente non appena siano stati valutati gli intervalli (12-14). Nota la soluzione di (4), diventa possibile minimizzare il modulo plastico in funzione di  $\psi$ , in modo da ottenere  $H_{SE}^r$  ed i corrispondenti valori di  $\psi$  ed  $n$ .

## Capitolo 7

### LOCALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE

#### 7.1 INTRODUZIONE

Nella maggior parte dei materiali si può osservare l'insorgere, ad opportuni livelli di deformazione, di discontinuità nel gradiente della deformazione (Rice 1976). Questo comportamento, che è noto come *localizzazione della deformazione*, si osserva nei materiali metallici<sup>1</sup> (Nadai 1931, pp. 86-125, 1950 (I) pp. 275-346, McClintock e Argon 1966, pp. 521-523), nei polimeri (McClintock e Argon 1966, pp. 255-257), nelle argille (Drescher e Vardoulakis 1988, Finno 1989), nei mezzi granulari (Desrues et al. 1885, Desrues e Hammad 1989), nelle rocce (Nadai 1931 pp. 86-125, Wawersik et al. 1990), nel calcestruzzo (Benaija 1991) ed inoltre, secondo Bazant e Mazars (1990), nei compositi a matrice cementizia, nelle ceramiche, nel legno, nel ghiaccio, nel carbone, nella carta.

I primi tentativi di interpretare matematicamente l'insorgere di discontinuità nel gradiente della deformazione si possono ritrovare nei lavori<sup>2</sup> di Nadai (1931, 1950), di Hill (1950

---

<sup>1</sup>Le bande dove si concentra la deformazione vengono dette, in questo contesto, bande di Lüder, cfr. Nadai (1931, pp. 86), Hill (1950, pp. 8-11).

<sup>2</sup>Nei lavori di Hill (1950, pp. 323-325, 1952), di Prager (1954) e di Thomas (1953, 1954, 1961 b pp. 100-110), si affronta il problema della comparsa delle bande di Lüder in una lamina metallica di materiale rigido-plastico utilizzando il criterio di snervamento di Tresca o di Huber-von Mises. Nel caso di trazione monoassiale di una lamina di materiale isotropo, la banda di

pp. 323-325, 1952, 1962), di Mandel (1966), di Prager (1954) e di Thomas (1953, 1954, 1961 b), tutti ristretti al modello rigido-perfettamente plastico.

È peraltro con i lavori di Hill e Hutchinson (1975), Palmer e Rice (1973), Rice (1973, 1976), Rudnicki e Rice (1975), Rice e Rudnicki (1980), Vardoulakis (1976, 1981, 1988), Vardoulakis et al. (1978), che la modellazione della localizzazione della deformazione nei solidi elastoplastici ha trovato una formulazione matematica sufficientemente generale.

Fra i molti lavori dedicati alla formulazione generale dell' argomento, è doveroso ricordare i lavori di Abeyaratne e Triantafillidis (1981), Asaro (1985), Bazant (1986, 1988), Benallal et al. (1989, 1990), Borrè e Maier (1989), Chambon (1986), Cleary (1976), Cleary e Rudnicki (1976), Darve (1984), Duszek e Perzyna (1988 a, b, 1989), Halphen (1978), Hutchinson e Tvergaard (1980), Knowles e Sternberg (1976, 1978), Ichikawa et al. (1990), Iwakuma e Nemat-Nasser (1982), Lippmann (1986, 1989), Loret (1987), Loret et al. (1990), Loret e Prevost (1990), Mear e Hutchinson (1985), Needleman (1979, 1989), Needleman e Rice (1978), Nikolaevskii e Rice (1979), Nova (1985, 1987, 1989), Ortiz (1987, 1989), Perzyna (1990), Rice (1985), Saje et al. (1982), Schaeffer (1988), Schaeffer et al. (1988), Schaeffer e Schaefer (1990), Triantafillidis e Aifantis (1986), Triantafillidis et al. (1982), Tvergaard (1981), Tvergaard et al. (1981), Vardoulakis (1988, 1989).

Infine, negli ultimi anni, sono stati dedicati molti lavori alla modellazione numerica dei fenomeni di localizzazione della deformazione ed alle difficoltà che si incontrano, e.g. la

---

taglio risulta inclinata di  $54.73^{\circ}$  rispetto all' asse della trazione, nel caso si utilizzi il criterio di snervamento di Huber-von Mises. Inoltre, sempre nell' ambito dello stesso modello, la comparsa di bande di taglio è esclusa nel caso di stati di dilatazione biassiale (biaxial stretching). Quest' ultimo risultato, in contrasto con l' evidenza sperimentale, è discusso in Marciniak e Kuczynski (1967), Stören e Rice (1975), Needleman (1976).

dipendenza del risultato dalle dimensioni del reticolo (mesh-sensitivity)<sup>3</sup>. Tra gli altri è doveroso ricordare i lavori di Batra e Liu (1989), Belytschko et al. (1988), Belytschko e Lasry (1989), Cundall (1989), de Borst (1986, 1989), Fish e Belytschko (1990), Kleiber (1986), Lemonds et al. (1985), Lemonds e Needleman (1986 a, b), Leroy et al. (1989), Nacar et al. (1989), Needleman e Tvergaard (1983), Ortiz e Quigley (1989), Ortiz et al. (1987), Pastor et al. (1991), Pietruszczak e Mróz (1981), Prevost e Hughes (1981), Prevost (1984).

Nel presente capitolo viene sviluppata la teoria della localizzazione della deformazione nei solidi elastoplastici. La presente trattazione differisce da quella di Rice (1976) nella scelta del legame costitutivo che coinvolge la derivata di Jaumann del tensore dello sforzo di Kirchhoff in luogo del tensore dello sforzo di Cauchy (cfr. § 3.8, osservazione *i.*). La condizione di localizzazione della deformazione viene espressa in modo esplicito nel caso della teoria infinitesima. Tale risultato è stato ottenuto da Bigoni e Hueckel (1989 b, 1990 a) nel caso di legge di flusso associata, quindi esteso alle leggi di flusso con sola componente deviatorica associata (Bigoni e Hueckel 1989 a, 1990 b) ed infine al caso di leggi di flusso non associate (Bigoni e Hueckel 1991 a).

## 7.2 LA LOCALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE

Si considera, di seguito, un solido omogeneo, soggetto ad uno stato deformativo caratterizzato da un gradiente della deformazione indipendente dal punto e si immagina di sovrapporre

---

<sup>3</sup> La "mesh-sensitivity" può essere spiegata osservando che in un continuo omogeneo non strutturato lo spessore delle bande di taglio risulta essere indefinito (e quindi tendente a zero per soddisfare le condizioni al contorno, Hill 1962).

un moto incrementale corrispondente ad un campo di velocità di deformazione omogeneo.<sup>4</sup> Ci si propone di studiare le condizioni sotto le quali risulta ammissibile, accanto al moto incrementale omogeneo, un moto incrementale che presenti una discontinuità nel gradiente della velocità attraverso una banda delimitata da due piani, detta *banda di taglio o di discontinuità*.

*Proposizione 1.:*

*Condizione necessaria affinché sia possibile una discontinuità nel gradiente della velocità attraverso una superficie piana in un solido caratterizzato dal tensore costitutivo tangente (non lineare)  $\tilde{C}$ , e che risulti:*

$$\tilde{C} \left[ L^\circ + g \otimes n \right] n - \tilde{C} [L^\circ] n = 0, \quad (2.1)$$

dove  $n$  rappresenta la normale alla banda,  $g$  un vettore parallelo alla direzione della velocità nella banda ed  $L^\circ$  il gradiente della velocità al di fuori della banda. All'interno della banda il gradiente della velocità risulta pertanto costante e pari a  $L^\circ + g \otimes n$ .

*Dimostrazione<sup>5</sup>:*

Per ipotesi, il corpo si trova in uno stato omogeneo descritto dai tensori  $T^\circ$  e  $F^\circ$  indipendenti dal punto. Utilizzando la descrizione Lagrangiana relativa, la risposta incrementale  $\dot{S}^\circ$  al campo omogeneo  $L^\circ$  viene ottenuta attraverso l'equazione costitutiva (3.8.7). Con il simbolo  $[[ \ ]]$  viene indicata, nel seguito, una discontinuità di prima specie. Con riferimento al gradiente della velocità tale discontinuità risulta:

<sup>4</sup>Tale moto incrementale può pensarsi originato da un incremento delle forze su  $\partial B_s$  e da una velocità su  $\partial B_v$ .

<sup>5</sup>La dimostrazione è dovuta a Rice (1976).

$$[[L]] = L - L^{\circ}, \quad (2.2)$$

dove  $L$  rappresenta il gradiente della velocità all' interno della banda. Applicando le equazioni costitutive incrementali, si ottiene:

$$\dot{S}^{\circ} = \tilde{C}[L^{\circ}], \quad (2.3)$$

$$\dot{S} = \tilde{C}[L^{\circ} + [[L]]]. \quad (2.4)$$

Affinchè il campo discontinuo sia ammissibile devono essere rispettate le seguenti due condizioni:

- *Compatibilità statica*

1. La continuità del vettore tensione attraverso il piano di discontinuità richiede:

$$[[\dot{S}]] n = 0. \quad (2.5)$$

mentre l' equilibrio (incrementale) all' interno della banda risulta verificato a-priori per la costanza di  $L$ .

- *Compatibilità cinematica sulla superficie di discontinuità*

La compatibilità cinematica è espressa dalla relazione<sup>6</sup>:

---

<sup>6</sup>La condizione (6) può essere ricavata direttamente in modo semplice (Rudnicki e Rice 1975). Se ne fornisce nel seguito una deduzione, come caso particolare, dalle condizioni generali di compatibilità su superfici (Thomas 1961 a, Chadwick e Powdrill 1965). Si consideri una funzione  $f$  :

$$f : \Omega (\subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (N.1)$$

e una superficie  $\Pi$  che interseca il dominio  $\Omega$  di  $f$  dividendolo nelle parti  $\Omega^+$  ed  $\Omega^-$ . Si suppone che la  $f$  sia continua in  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$  ma che presenti una discontinuità su  $\Pi$ . Se:

$$[[L]] = g \otimes n. \quad (2.6)$$

Pertanto, sostituendo nella (5) le (3), (4) e (6), si ottiene:

$$[[\dot{S}]] n = \tilde{C}^h [L^\circ + g \otimes n] n - \tilde{C}^h [L^\circ] n = 0, \quad (2.7)$$

ovvero la (1). ■

$$\Pi : \Xi \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x_i = \phi_i(\xi^\mu), \quad i=1,2,3, \quad \mu=1,2 \quad (N.2)$$

è la rappresentazione Gaussiana di  $\Pi$ , si definisce la discontinuità nella  $f$  come:

$$[[f]] = f^+(\phi_i) - f^-(\phi_i). \quad (N.3)$$

Le condizioni geometriche di compatibilità del primo ordine (condizioni sulle derivate prime di  $f$ ) sono:

$$[[f_{,i}]] = [[f_{,k}]] n_k n_i + g^{B\mu} [[f_{,B}]] \phi_{i,\mu}, \quad (N.4)$$

dove  $g$  è il tensore metrico associato allo spazio  $\mathbb{R}^2(\xi^1, \xi^2)$ . Se  $f_{,B} = 0$ , la (N.4) si riduce alla:

$$[[f_{,i}]] = [[f_{,k}]] n_k n_i. \quad (N.5)$$

Se  $\Pi$  è un piano, risulta  $g^{B\mu} = \delta_{B\mu}$  e  $\phi_{i,\mu}$  rappresenta il coseno direttore  $a_i^\mu$  dell'angolo tra gli assi  $\xi^\mu$  e  $x_i$ . La (N.4) diventa allora:

$$[[f_{,i}]] = [[f_{,k}]] n_k n_i + [[f_{,B}]] a_i^\mu. \quad (N.6)$$

Nel caso della localizzazione della deformazione la velocità  $\mathbf{v}$  è costante lungo la banda e dalla (N.5) deriva la (6).

*Proposizione 2.:*

*Condizione necessaria affinché sia ammissibile una discontinuità nel gradiente della velocità (attraverso una superficie piana di normale  $\mathbf{n}$ ) nel solido di confronto di Hill e che risulti soddisfatta la condizione:*

$$\exists \mathbf{n}, \mathbf{g} \neq \mathbf{0} : \tilde{\mathbf{A}}^h(\mathbf{n}) \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

che afferma la non ellitticità del tensore  $\tilde{\mathbf{C}}^h$ .

La dimostrazione discende immediatamente dalla (7) ricordando la linearità del tensore  $\tilde{\mathbf{C}}^h$ .

Osservazioni:

i.) *Confronto con i risultati di Rice et al.*<sup>7</sup>

La (8) può essere posta nella forma equivalente:

$$\det \left[ \mathbf{A}^h(\mathbf{n}) + \mathbf{A}^g(\mathbf{n}) \right] = 0, \quad (2.9)$$

dove:

$$\mathbf{A}^g(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n}) \mathbf{I} - \mathbf{T} \mathbf{n} \mathbf{n} - \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{T} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{T} \right]. \quad (2.10)$$

Il modello costitutivo proposto da Rice et al. è del tipo:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbb{C}^{RR}[\mathbf{D}], \quad (2.11)$$

ove  $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$  è la derivata di Jaumann dello sforzo di Cauchy e il tensore  $\mathbb{C}^{RR}$  è scelto uguale a  $\mathbb{C}$ <sup>8</sup>. Se si adotta la descrizione

<sup>7</sup> Rudnicki e Rice (1975), Rice (1976), Needleman e Rice (1978), Rice e Rudnicki (1980).

<sup>8</sup> Pertanto la formulazione di Rice non risulta equivalente a quella

Lagrangiana relativa, vale la (2.6.13), ovvero:

$$\dot{\mathbf{S}} = \overset{\circ}{\mathbf{T}} + \mathbf{W}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{T}\mathbf{L}^T + \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.12)$$

Ne risulta che il legame costitutivo (11) può essere riscritto nella forma:

$$\dot{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{C}}^{\text{RR}}[\mathbf{L}], \quad (2.13)$$

dove  $\tilde{\mathbf{C}}^{\text{RR}}_{ijhk} = \tilde{\mathbf{C}}_{ijhk} + T_{ij} \delta_{hk}$ , ovvero in esteso:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}^{\text{RR}}_{ijhk} &= \mathbf{C}^{\text{RR}}_{ijhk} \\ &+ \frac{1}{2} [T_{jk} \delta_{ih} - T_{ih} \delta_{jk} - T_{ik} \delta_{jh} - T_{jh} \delta_{ik} + 2T_{ij} \delta_{hk}]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Infine, impiegando le (5) e (6), la condizione di localizzazione diventa:

$$\left\{ \mathbf{A}^h(\mathbf{n}) + \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{I} + \mathbf{T} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{T} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{T} \right] \right\} \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

che è la condizione ricavata da Rice et al.. Si noti che la (15) differisce dalla (9) solo per il segno del termine  $\mathbf{T} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ . La differenza è comunque importante poichè il tensore  $\mathbf{A}^g(\mathbf{n})$  definito dalla (10) risulta simmetrico, mentre invece non risulta simmetrico il termine in parentesi quadra nella (15). La (15) diventa identica alla (9) nel caso sia  $\operatorname{tr}\mathbf{D} = 0$ . Quindi dalla condizione (15) si ottengono, come casi particolari, le condizioni ottenute da Hill e Hutchinson (1975) (deformazione piana ed isocorica e plasticità associata) e da Needleman (1979) (deformazione piana ed isocorica e plasticità non

associata).

ii.) Si scomponga ora il tensore  $\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}$  nella parte simmetrica  $[[ \mathbf{D} ]]$  e antisimmetrica  $\text{Skw}(\mathbf{g} \otimes \mathbf{n})$ . Il tensore  $[[ \mathbf{D} ]]$  ha i seguenti autovalori e autovettori<sup>9</sup>:

$$[[ D_I ]] = \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) + |\mathbf{g}| |\mathbf{n}|}{2}, \quad \mathbf{d}_I = |\mathbf{g}| \mathbf{n} + |\mathbf{n}| \mathbf{g}, \quad (2.16)$$

<sup>9</sup>Si opera di seguito la decomposizione spettrale di  $[[ \mathbf{D} ]]$ . Gli autovalori si ottengono come radici della equazione caratteristica:

$$\omega^3 - \bar{I}_1 \omega^2 + \bar{I}_2 \omega = 0, \quad (N.1)$$

dove:

$$\bar{I}_1 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \quad (N.2)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{4} [ (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2 - \mathbf{g}^2 \mathbf{n}^2 ], \quad (N.3)$$

$$\bar{I}_3 = 0. \quad (N.4)$$

Le radici della equazione caratteristica (N.1) sono i valori  $[[ D_I ]]$ ,  $[[ D_{II} ]]$  e  $[[ D_{III} ]]$ . I corrispondenti autovettori si ottengono utilizzando la definizione:

$$(\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}) \mathbf{d}_I = 2 [[ D_I ]] \mathbf{d}_I, \quad (N.5)$$

dove a  $[[ D_{II} ]] = 0$  corrisponde  $\mathbf{d}_{II} = \mathbf{g} \times \mathbf{n}$ , mentre a  $[[ D_I ]]$  e  $[[ D_{III} ]]$  corrispondono le due equazioni:

$$\left[ \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \pm |\mathbf{g}| |\mathbf{n}|) \mathbf{I} \right] \mathbf{d}_I = 0, \quad (N.6)$$

Dovendo risultare ortogonali a  $\mathbf{d}_{II}$ , gli autovettori  $\mathbf{d}_I$  e  $\mathbf{d}_{III}$  possono essere espressi nella forma:

$$\mathbf{d}_I = \mathbf{n} + \tau \mathbf{g}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (N.7)$$

Sostituendo la (N.7) nella (N.6) si ottengono infine i valori  $\mathbf{d}_I$  e  $\mathbf{d}_{II}$ .

$$\llbracket D_{II} \rrbracket = 0, \quad \mathbf{d}_{II} = \mathbf{n} \times \mathbf{g}, \quad (2.17)$$

$$\llbracket D_{III} \rrbracket = \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) - |\mathbf{g}| |\mathbf{n}|}{2}, \quad \mathbf{d}_{III} = |\mathbf{g}| \mathbf{n} - |\mathbf{n}| \mathbf{g}. \quad (2.18)$$

Si noti che  $\llbracket D_I \rrbracket \geq \llbracket D_{II} \rrbracket \geq \llbracket D_{III} \rrbracket$ . Inoltre  $\llbracket D_I \rrbracket = 0$  se e solo se  $\mathbf{g}$  ed  $\mathbf{n}$  sono coassiali ed equiversi, mentre  $\llbracket D_{III} \rrbracket = 0$  se e solo se  $\mathbf{g}$  ed  $\mathbf{n}$  sono coassiali e di verso opposto.

iii.) Si assuma come sistema di riferimento una terna cartesiana ortogonale con asse  $x_3$  nella direzione  $\mathbf{n} \times \mathbf{g}$ , asse  $x_1$  diretto secondo  $\mathbf{n}$  ed origine nel centro della banda. La discontinuità del gradiente della velocità, fornita dalla (6), ha solo le componenti di indici 1 e 2 non nulle:

$$\llbracket \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \rrbracket = g_1, \quad \llbracket \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \rrbracket = g_2, \quad \llbracket \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \rrbracket = \llbracket \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \rrbracket = 0, \quad (2.19)$$

ed integrando si ottiene:

$$v_1 = g_1 x_1 + c_1, \quad v_2 = g_2 x_1 + c_2. \quad (2.20)$$

Assumendo nulla la velocità in corrispondenza dei punti sul piano coordinato  $x_2, x_3$ , le (20) divengono:

$$v_1 = g_1 x_1, \quad v_2 = g_2 x_1. \quad (2.21)$$

In tal caso si deduce che la velocità nella banda ha direzione parallela al vettore  $\mathbf{g}$  ed andamento lineare lungo  $\mathbf{n}$ .

iv.) Si noti che, se  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = 0$ , la (6) rappresenta il gradiente della velocità di una deformazione di taglio semplice,<sup>10</sup> con

---

<sup>10</sup>La localizzazione con cinematica di taglio semplice nella banda è

piano di scorrimento di normale  $\mathbf{n}$  e direzione  $\mathbf{g}$ . Nel caso in esame, dalle (16-18) risulta:

$$\text{tr}[\mathbf{D}] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.22)$$

Nel seguito si indicano con il nome di *bande di taglio* le bande corrispondenti ad una localizzazione che si sviluppa con  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{g}$  non paralleli. Se invece  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{g}$  sono coassiali la localizzazione si dice avvenire con modo di "split". In altre parole, si intende con modo di "split" il caso di allontanamento (avvicinamento) relativo e scorrimento nullo dei due piani di discontinuità che definiscono la banda.

*Proposizione 3.:*

La condizione (8), che esprime la perdita di ellitticità del tensore costitutivo  $\tilde{\mathbb{C}}^h$ , ammette una soluzione non banale quando il modulo plastico  $q$  raggiunge il valore critico  $q^1(\mathbf{n})$ ; tale soluzione risulta:

$$q^1(\mathbf{n}) = E[Q]\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}^1(\mathbf{n}), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{g}^1(\mathbf{n}) = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) E[\mathbf{P}]\mathbf{n}, \quad (2.24)$$

dove<sup>11</sup>:

---

stata studiata fino dai primi lavori di Hill (1950, 1952), Nadai (1931), Prager (1954), Thomas (1953, 1954, 1961 b) perchè venivano analizzati modelli rigido-plastici con flusso plastico isocorico.

<sup>11</sup> Il tensore acustico  $\mathbf{A}_e(\mathbf{n})$  nel caso elastico lineare isotropo risulta:

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{n}) = (\lambda + \mu) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu \mathbf{I}, \quad (N.1)$$

e possiede i seguenti autovalori e autovettori:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbf{A}_g(\mathbf{n}), \quad (2.25)$$

(si noti che gli indici "e" e "g" vengono usati indifferentemente come pedici e come apici)<sup>12</sup>.

*Dimostrazione*<sup>13</sup>:

La (9) può essere scritta nella seguente forma equivalente:

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{n}) \mathbf{g} - \frac{1}{q} \mathbb{E}[\mathbf{P}] \mathbf{n} \mathbf{Q} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{n} \otimes \mathbf{g}] + \mathbf{A}_g(\mathbf{n}) \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Introducendo il tensore  $\mathbf{B}$  definito dalla (25), la (26) diventa:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B}) \mathbf{g} = \frac{1}{q} \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}] \mathbf{n} \mathbf{Q} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{n} \otimes \mathbf{g}]. \quad (2.27)$$

$$\omega_1 = (\lambda + 2\mu), \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{n} \quad (N.2)$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \mu, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{s}, \text{ con } \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (N.3)$$

Il tensore inverso del tensore acustico è stato ottenuto da Rice (1976) nella forma:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{n}) = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\mu} \mathbf{I}, \quad (N.4)$$

e possiede i seguenti autovalori e autovettori:

$$\omega_1 = 1/(\lambda + 2\mu), \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{n} \quad (N.5)$$

$$\omega_2 = \omega_3 = 1/\mu, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{s}, \text{ con } \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (N.6)$$

<sup>12</sup>Come osserva Rice (1976), l'ordine di grandezza dell'autovalore massimo del tensore  $\mathbf{B}$  è quello di un autovalore del tensore dello sforzo diviso il modulo elastico. Gli autovalori di  $\mathbf{B}$  risultano quindi, in generale, molto piccoli rispetto alla unità. Il termine  $(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$  può essere quindi valutato con la precisione voluta tramite lo sviluppo in serie:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^3 + \dots$$

Se si trascurano tutti i termini dello sviluppo in serie rispetto all'unità, si ottiene la condizione di localizzazione della deformazione della teoria infinitesima.

<sup>13</sup>Tale dimostrazione è dovuta a Rice (1976).

Infine si può facilmente controllare che la (27) è soddisfatta da  $q = q^1$  e  $g = g^1$  nella forma (23) e (24). ■

Nel caso di un solido elastoplastico, caratterizzato dal tensore costitutivo  $\mathbb{C}$ , possono presentarsi quattro diverse condizioni, all'istante della localizzazione della deformazione:

1) carico plastico fuori e dentro la banda:

$$Q \cdot E \left[ L^\circ + g \otimes n \right] > 0 \quad \text{e} \quad Q \cdot E[L^\circ] > 0. \quad (2.28)$$

Il tensore  $\tilde{\mathbb{C}}$  diventa lineare ed uguale a  $\tilde{\mathbb{C}}^h$  e la condizione di localizzazione coincide con la (8) (o la (9)).

2) scarico elastico fuori e dentro la banda:

$$Q \cdot E \left[ L^\circ + g \otimes n \right] \leq 0 \quad \text{e} \quad Q \cdot E[L^\circ] \leq 0. \quad (2.29)$$

Il tensore  $\tilde{\mathbb{C}}$  diventa lineare ed uguale a  $\tilde{\mathbb{E}}$  e la condizione (1) necessaria per la localizzazione diventa:

$$\det \tilde{\mathbb{A}}_e(n) = 0, \quad (2.30)$$

che rappresenta ovviamente la condizione di localizzazione di un solido incrementalmente olonomo caratterizzato dal tensore costitutivo isotropo  $\mathbb{E}$ .

3) scarico elastico fuori dalla banda e carico plastico nella

banda<sup>14</sup>:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \left[ \mathbf{L}^{\circ} + \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \right] > 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{L}^{\circ}] \leq 0. \quad (2.31)$$

In tale caso la (1) diventa:

$$\tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}] \mathbf{n} - \frac{1}{q} \mathbf{E}[\mathbf{P}] \mathbf{n} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \left[ \mathbf{L}^{\circ} + \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \right] = 0, \quad (2.32)$$

Per via della linearità di  $\mathbf{E}$ , la (32) può essere posta nella forma:

$$\tilde{\mathbf{A}}^h(\mathbf{n}) \mathbf{g} = \frac{1}{q} \mathbf{E}[\mathbf{P}] \mathbf{n} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}^{\circ}], \quad (2.33)$$

ove  $\mathbf{D}^{\circ} = (\mathbf{L}^{\circ} + \mathbf{L}^{\circ T})/2$ .

4) scarico elastico nella banda e carico plastico fuori dalla

banda<sup>15</sup>:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \left[ \mathbf{L}^{\circ} + \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \right] \leq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{L}^{\circ}] > 0. \quad (2.34)$$

In tale caso la (1) diventa:

$$\tilde{\mathbf{E}}[\mathbf{g} \otimes \mathbf{n}] \mathbf{n} + \frac{1}{q} \mathbf{E}[\mathbf{P}] \mathbf{n} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{L}^{\circ}] = 0, \quad (2.35)$$

che può essere scritta come:

$$\tilde{\mathbf{A}}_e(\mathbf{n}) \mathbf{g} = - \frac{1}{q} \mathbf{E}[\mathbf{P}] \mathbf{n} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}[\mathbf{D}^{\circ}]. \quad (2.36)$$

---

<sup>14</sup> Tale situazione presenta un notevole riscontro sperimentale (Rice e Rudnicki 1980).

<sup>15</sup> Tale situazione non sembra essere stata considerata in letteratura.

Proposizione 4.<sup>16</sup> :

Il modulo plastico critico corrispondente alla localizzazione della deformazione nel solido di confronto di Hill, non è inferiore al modulo plastico critico per la localizzazione nel caso di carico plastico nella banda e scarico elastico al di fuori, ovvero:

$$\left( q^1(\mathbf{n}) \right)_{\text{solido tipo Hill}} \geq \left( q^1(\mathbf{n}) \right)_{\substack{\text{solido elastoplastico} \\ \text{carico nella banda / scarico fuori} \\ \text{dalla banda}}} \quad (2.37)$$

*Dimostrazione:*

Procedendo per assurdo, si suppone che si abbia localizzazione della deformazione nel caso di scarico elastico al di fuori della banda e carico plastico nella banda (caso 3.) prima della localizzazione nel solido di Hill. La condizione (8) non è quindi soddisfatta ed il tensore  $\tilde{\mathbf{A}}^h(\mathbf{n})$  non è singolare. Pertanto la (33) può essere posta nella forma:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{q} \tilde{\mathbf{A}}_h^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \mathbf{Q} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{D}^0]. \quad (2.38)$$

Sostituendo la (38), nella (31)<sub>1</sub>, si ottiene:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{D}^0] + \frac{1}{q} \left[ \mathbf{n} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_h^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} (\mathbf{Q} \cdot \mathbb{E}[\mathbf{D}^0]) \right] \cdot \mathbb{E}[\mathbf{Q}] > 0, \quad (2.39)$$

che, tenendo presente la (31)<sub>2</sub>, diventa:

$$1 + \frac{1}{q} \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_h^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \leq 0. \quad (2.40)$$

Il tensore inverso del tensore  $\tilde{\mathbf{A}}_h(\mathbf{n})$  risulta:

---

<sup>16</sup> Tale dimostrazione è dovuta a Rice e Rudnicki (1980), Borrè e Maier (1989).

$$\tilde{\mathbf{A}}_h^{-1}(\mathbf{n}) = \left[ \mathbf{I} + \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}}{q - q^1} \right] (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}), \quad (2.41)$$

dove  $q^1$  è dato dalla (23) ed inoltre:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{b} = \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n}. \quad (2.43)$$

Sostituendo la (41) nella (39) si ottiene:

$$\frac{q}{q - q^1} \leq 0, \quad (2.44)$$

pertanto, nel caso in cui sia  $q > 0$ , risulta  $q^1 \geq q$ . ■

*Proposizione 5.*<sup>17</sup> :

*Il modulo plastico critico corrispondente alla localizzazione nel solido di confronto di Hill non è inferiore al modulo plastico critico per la localizzazione nel caso di scarico elastico nella banda e carico plastico al di fuori, ovvero:*

$$\left( q^1(\mathbf{n}) \right)_{\substack{\text{solido} \\ \text{tipo Hill}}} \geq \left( q^1(\mathbf{n}) \right)_{\substack{\text{solido elastoplastico} \\ \text{scarico nella banda} / \text{carico fuori} \\ \text{dalla banda}}} \quad (2.45)$$

*Dimostrazione:*

Procedendo come nella dimostrazione della proposizione 4, utilizzando le (34) e (36), si ottiene la condizione:

$$1 - \frac{1}{q} \mathbb{E}[\mathbf{Q}]\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n} \leq 0, \quad (2.46)$$

---

<sup>17</sup>Questo caso sembra non essere stato considerato in letteratura.

che, ricordando dalla definizione (25) di  $\mathbf{B}$  che  $\tilde{\mathbf{A}}_e^{-1}(\mathbf{n}) = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n})$  e impiegando la definizione (23) di  $q^1$ , diventa:

$$1 - \frac{q^1}{q} \leq 0, \quad (2.47)$$

che implica, nel caso in cui sia  $q > 0$ ,  $q^1 \geq q$ . ■

*Dalle proposizioni 4 e 5, precedentemente dimostrate, si deduce che la localizzazione nel solido elastoplastico coincide con quella del solido di confronto tipo Hill (se si esclude che la localizzazione corrispondente a scarico elastico fuori e dentro la banda possa precedere la localizzazione nel solido di Hill<sup>18</sup>).*

### 7.3 SOLUZIONE ESPlicitA DELLA CONDIZIONE DI LOCALIZZAZIONE

Nel seguito ci si restringe all' ambito della teoria infinitesima. In tal caso la condizione di localizzazione della deformazione nel solido di confronto tipo Hill si ottiene ponendo  $(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I}$  nelle (2.23) e (2.24). Si ottiene pertanto:

$$q(\mathbf{n}) = q^1(\mathbf{n}) = \mathbb{E}[Q] \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}^1(\mathbf{n}), \quad (3.1)$$

---

<sup>18</sup> Questa ipotesi risulta sempre verificata nel caso della legge di flusso associata. Nel caso del legame non associato non si può escludere che possa verificarsi che la localizzazione corrispondente alla condizione scarico-scarico possa precedere quella nel solido di confronto tipo Hill (anche nella teoria infinitesima). Runesson e Mròz (1989) hanno infatti dimostrato che, nel caso di legge di flusso non associata, per certi  $\mathbf{X}^*$  può verificarsi  $\mathbf{X}^* \cdot \mathbf{C}[\mathbf{X}^*] > \mathbf{X}^* \cdot \mathbf{E}[\mathbf{X}^*]$ .

$$\mathbf{g}^1(\mathbf{n}) = \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{E}[\mathbf{P}]\mathbf{n}, \quad (3.2)$$

$$\text{dove } \mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n}) = - \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\mu} \mathbf{I}.$$

Utilizzando la espressione di  $\mathbf{A}_e^{-1}(\mathbf{n})$  e riscrivendo la (1) in termini di modulo di incrudimento, si ottiene:

$$\begin{aligned} H^1(\mathbf{n}) = 2G \left[ 2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}\mathbf{Q} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}\mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{n}) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \right. \\ \left. - \frac{\nu}{1-\nu} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}\mathbf{n} - \text{tr } \mathbf{P})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{n} - \text{tr } \mathbf{Q}) \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}) = 2 \mathbf{P}\mathbf{n} - \frac{1}{1-\nu} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}\mathbf{n})\mathbf{n} + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{tr } \mathbf{P})\mathbf{n}. \quad (3.4)$$

In un generico programma di carico, la localizzazione diventa possibile quando il modulo di incrudimento eguaglia il massimo valore assunto dalla (3) al variare di  $\mathbf{n}$ . Occorre quindi determinare il massimo valore, detto critico, del modulo di incrudimento (3), ovvero risolvere il seguente problema di massimo vincolato:

$$H_{cr}^1(\mathbf{n}) = \max_{\mathbf{n}} H^1(\mathbf{n}), \quad (3.5)$$

soggetto a:

$$|\mathbf{n}| = 1. \quad (3.6)$$

Di seguito viene ricavata una soluzione esplicita<sup>19</sup> del problema (5-6). Tale soluzione è stata ricavata da Bigoni ed Hueckel dapprima nel caso della plasticità associata (1989 a, 1990 a), quindi estesa alle leggi di flusso plastico con sola componente deviatorica associata (1989 b, 1990 b) ed infine a leggi di flusso

---

<sup>19</sup>Ortiz (1987) e Ortiz et al. (1987) propongono una tecnica numerica per risolvere il problema (5-6).

non associate generiche (1991 a). Il procedimento seguito conduce ad una generalizzazione della soluzione esplicita ottenuta da Rudnicki e Rice (1975), valida solo nel caso delle superfici di snervamento di Huber-von Mises e di Drucker-Prager in presenza di flusso plastico con componente deviatorica associata.

Il problema di massimo vincolato (5-6) viene ridotto al problema di massimo libero della funzione:

$$L(\mathbf{n}, \beta) = 2G \left[ 2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \mathbf{Q} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{n}) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - \frac{\nu}{1-\nu} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \mathbf{n} - \text{tr } \mathbf{P})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{n} - \text{tr } \mathbf{Q}) \right] - \beta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - 1), \quad (3.7)$$

dove  $\beta$  rappresenta il moltiplicatore di Lagrange. Gli estremi della funzione (7) vengono ricavati imponendo le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0, \quad (3.8)$$

che porgono:

$$2 \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{n} - \frac{1}{1-\nu} \left[ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{n}) \mathbf{P} \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \mathbf{n}) \mathbf{Q} \mathbf{n} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \left[ (\text{tr } \mathbf{Q}) \mathbf{P} \mathbf{n} + (\text{tr } \mathbf{P}) \mathbf{Q} \mathbf{n} \right] = \frac{\beta}{2G} \mathbf{n},$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (3.9)$$

Nel sistema di riferimento principale dei tensori (coassiali)  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  ed indicando le componenti con gli indici (non sommati)  $i, j, k$ , le equazioni (9) possono essere riscritte nella forma:

$$2n_i P_i Q_i - \frac{1}{1-\nu} \left[ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{n}) P_i + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \mathbf{n}) Q_i \right] n_i$$

$$+ \frac{\nu}{1-\nu} \left[ (\text{tr } Q)P_i + (\text{tr } P)Q_i \right] n_i = \frac{\beta}{2G} n_i, \quad (i=1,2,3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (3.10)$$

Il sistema delle quattro equazioni (10), risolto nelle quattro incognite  $n_1^2$ ,  $n_2^2$ ,  $n_3^2$  e  $\beta$ , fornisce tutti gli estremi della funzione (7). Gli estremi corrispondono a differenti inclinazioni della banda, che possono essere catalogate come segue:

- i) - nessuna delle componenti del versore  $\mathbf{n}$  è nulla,
- ii) - una delle componenti del versore  $\mathbf{n}$  è nulla,
- iii) - due componenti del versore  $\mathbf{n}$  sono nulle.

Per ricavare il massimo (5) tra tutti gli estremi, occorre ricavare tutte le soluzioni del sistema (10) nei vari casi (i)-(iii), che vengono di seguito esaminati e risolti.

- i) - nessuna delle componenti del versore  $\mathbf{n}$  è nulla.

Sostituendo la componente  $n_3^2$ , ricavata dalla (10)<sub>2</sub>, ed eliminando l' incognita  $\beta$ , il sistema (10) si riduce al sistema di due equazioni nelle due incognite  $n_1^2$  ed  $n_2^2$  (dove gli indici 1, 2, 3 indicano le componenti principali):

$$\begin{cases} n_1^2 \left[ 2 (Q_1 - Q_3)(P_1 - P_3) \right] + n_2^2 \left[ (Q_2 - Q_3)(P_1 - P_3) + (Q_1 - Q_3)(P_2 - P_3) \right] = a, \\ n_1^2 \left[ (Q_1 - Q_3)(P_2 - P_3) + (Q_2 - Q_3)(P_1 - P_3) \right] + n_2^2 \left[ 2 (Q_2 - Q_3)(P_2 - P_3) \right] = b, \end{cases} \quad (3.11)$$

dove:

$$a = Q_1 (P_1 - P_3) + P_1 (Q_1 - Q_3) + \nu [Q_2 (P_1 - P_3) + P_2 (Q_1 - Q_3)], \quad (3.12)$$

$$b = Q_2 (P_2 - P_3) + P_2 (Q_2 - Q_3) + \nu [Q_1 (P_2 - P_3) + P_1 (Q_2 - Q_3)]. \quad (3.13)$$

Il sistema (11) ammette una soluzione unica se:

$$\Delta = - [(Q_1 - Q_3)(P_2 - P_3) - (Q_2 - Q_3)(P_1 - P_3)]^2 \neq 0, \quad (3.14)$$

Si noti che il determinante (14) si annulla sempre nel caso di legge di flusso associata e nel caso di legge di flusso con la sola componente deviatorica associata (Bigoni e Hueckel 1990 b):

$$P = Q + \xi I, \quad (3.15)$$

dove  $\xi$  è una qualunque funzione scalare.

Se il determinante (14) si annulla, il sistema (11) ammette infinite soluzioni solo nei due seguenti casi<sup>20</sup>:

---

<sup>20</sup> Nel caso  $\Delta=0$ , il sistema (10) ammette (infinite) soluzioni se le due equazioni sono linearmente dipendenti. La condizione  $\Delta = 0$  si scrive come:

$$(Q_1 - Q_3)(P_2 - P_3) = (Q_2 - Q_3)(P_1 - P_3). \quad (N.1)$$

Si supponga  $Q_1 \neq Q_3$  e  $P_2 \neq P_3$ , dalla (N.1) consegue  $Q_2 \neq Q_3$  e  $P_1 \neq P_3$ . Affinchè le equazioni (11) siano linearmente dipendenti deve risultare:

$$a/b = \left[ (Q_2 - Q_3)(P_1 - P_3) + (Q_1 - Q_3)(P_2 - P_3) \right] / \left[ 2 (Q_2 - Q_3)(P_2 - P_3) \right]. \quad (N.2)$$

Sostituendo la (N.1) nella (N.2), si ottiene:

$$(Q_1 - Q_2)(P_1 - P_3) = - (Q_1 - Q_3)(P_1 - P_2), \quad (N.3)$$

che assieme alla (N.1) porge:

$$P_3(Q_1 - Q_2) = P_1(Q_1 - Q_2), \quad (N.4)$$

$$Q_3(P_1 - P_2) = Q_1(P_1 - P_2). \quad (N.5)$$

Quindi, se  $Q_1 \neq Q_3$ ,  $P_2 \neq P_3$ ,  $Q_2 \neq Q_3$  e  $P_1 \neq P_3$ , il sistema è risolubile

- 1)  $Q_i = Q_j \neq Q_k$  e  $P_i = P_j \neq P_k$   
 2)  $Q_1 = Q_2 = Q_3$  e  $P_1 = P_2 = P_3$ ,

Risulta quindi necessario risolvere i seguenti tre sottocasi di (i):

- i-a)  $\Delta \neq 0$ ,  
 i-b)  $\Delta = 0$ ,  $Q_i = Q_j \neq Q_k$  e  $P_i = P_j \neq P_k$ ,  
 i-c)  $\Delta = 0$ ,  $Q_i = Q_j = Q_k$  e  $P_i = P_j = P_k$ ,

Sottocaso: i-a)  $\Delta \neq 0$ .

Il sistema (11) ammette la seguente soluzione:

$$n_1^2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ 2a (P_2 - P_3)(Q_2 - Q_3) - b [(P_1 - P_3)(Q_2 - Q_3) + (P_2 - P_3)(Q_1 - Q_3)] \right\},$$

$$n_2^2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ 2b (P_1 - P_3)(Q_1 - Q_3) - a [(P_1 - P_3)(Q_2 - Q_3) + (P_2 - P_3)(Q_1 - Q_3)] \right\},$$

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2, \quad (3.16)$$

È importante notare che la soluzione ed il vincolo riguardano il quadrato delle componenti del versore  $\mathbf{n}$ . È quindi possibile che in soluzione si ottengano dei valori negativi dei quadrati delle componenti di  $\mathbf{n}$ . In tali casi la soluzione va cercata nei casi (ii) e (iii), perchè l'estremo (16) cade al di

---

solo se  $Q_1 = Q_2$  e  $P_1 = P_2$ . D'altra parte se  $Q_1 = Q_3$  (un ragionamento analogo si può fare per  $P_1 = P_3$ ) la (N.1) implica  $Q_2 = Q_3$  o  $P_1 = P_3$ . Nel caso  $Q_1 = Q_2 = Q_3$  il sistema (11) ammette soluzione solo se  $P_1 = P_2 = P_3$  mentre nel caso  $Q_1 = Q_3$  e  $P_1 = P_3$  il sistema (11) ammette soluzione solo se  $Q_2 \neq Q_1 = Q_3$  e  $P_2 \neq P_1 = P_3$ .

fuori del dominio di definizione della funzione (3).

Una volta che siano noti i valori numerici delle componenti (16), il corrispondente estremo del modulo plastico può essere facilmente ottenuto sostituendo le (16) nella (3).

Si noti che la soluzione (16) rappresenta l' unica soluzione corrispondente ad una banda di normale non ortogonale ad una direzione principale di  $P$  e  $Q$  (e quindi anche di  $T$  nei casi di coassialità con  $P$  e  $Q$ )<sup>21</sup>.

Sottocaso: i-b)  $\Delta = 0$ ,  $Q_i = Q_j \neq Q_k$  e  $P_i = P_j \neq P_k$ .

I tensori  $P$  e  $Q$  risultano simmetrici rispetto all' asse  $k$ . Dal sistema (11) può essere determinata la sola componente del versore  $n$  sull' asse  $k$ , cioè i versori  $n$  corrispondenti alle possibili soluzioni descrivono un cono di asse  $k$  e il sistema (2) ammette  $\infty^1$  soluzioni. Ad ogni valore di  $n_i$  ed  $n_j$  corrisponde peraltro lo stesso valore del modulo di incrudimento, quindi il valore estremo del modulo di incrudimento, assieme alla componente  $n_k$ , può essere determinato, senza perdita di generalità, assumendo nulla una delle componenti di  $n$  sugli assi  $i$  o  $j$  (caso ii). Se l' estremo corrispondente risulta essere il massimo della (3), allora il numero di bande possibili diventa infinito, coerentemente con la simmetria attorno a  $k$ .

Sottocaso: i-c)  $\Delta = 0$ ,  $Q_i = Q_j = Q_k$  e  $P_i = P_j = P_k$ .

I tensori  $P$  e  $Q$  sono sferici. In questo caso la inclinazione della banda è indeterminata ed il sistema (11) ammette  $\infty^2$  soluzioni. Il valore critico del modulo di incrudimento (non ci sono massimizzazioni da eseguire) può essere facilmente

---

<sup>21</sup>In letteratura non è mai stato riportato, a conoscenza dello scrivente, il caso di una banda di taglio di normale non ortogonale ad una direzione principale di sforzo con  $P$ ,  $Q$  e  $T$  coassiali. Questa circostanza può essere spiegata osservando che la maggioranza delle leggi di flusso sono tali da annullare a priori il determinante (14). Inoltre non si dimentichi che l' estremo (16) può non corrispondere al massimo.

determinato assumendo nulle due componenti del versore  $\mathbf{n}$  (caso iii). In questo caso si può ricavare direttamente dalla (4) che la cinematica della localizzazione è un modo di "split".

**ii) - una delle componenti del versore  $\mathbf{n}$  è nulla.**

La normale alla banda giace in un piano principale dei tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ . Si supponga che sia  $n_k = 0$ . Risolvendo in  $n_j^2$ , il sistema (10) diventa:

$$\begin{aligned} n_1^2 \left[ (Q_i - Q_j)P_i + (P_i - P_j)Q_i \right] &= \\ &= 2P_i Q_i - Q_j P_i - P_j Q_i + \nu \left[ P_i (Q_j + Q_k) + Q_i (P_j + P_k) \right] + \frac{\beta}{2G}(1-\nu), \\ n_1^2 \left[ (Q_i - Q_j)P_j + (P_i - P_j)Q_j \right] &= \\ &= \nu \left[ P_j (Q_i + Q_k) + Q_j (P_i + P_k) \right] + \frac{\beta}{2G}(1-\nu), \\ n_j^2 &= 1 - n_1^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Il sistema (17) ammette una soluzione unica nelle incognite  $n_1^2$  e  $\beta$ , quando:

$$\Delta = -\frac{\beta}{G} (1-\nu) (Q_i - Q_j)(P_i - P_j) \neq 0. \quad (3.18)$$

Se  $Q_i = Q_j$  e  $P_i \neq P_j$  o  $Q_i \neq Q_j$  e  $P_i = P_j$ , il sistema (17) non ammette soluzione<sup>22</sup>, mentre se  $Q_i = Q_j$  e  $P_i = P_j$ , il sistema (17) ammette

---

<sup>22</sup>Se  $P_i = P_j$  e  $Q_i \neq Q_j$ , oppure  $P_i \neq P_j$  e  $Q_i = Q_j$ , i coefficienti di  $n_1^2$  nelle prime due equazioni (17) coincidono ed il determinante (18) si annulla. Ne consegue che il sistema ammette (infinite) soluzioni se e solo se coincidono i termini noti. La condizione di uguaglianza dei termini noti del sistema (17) nei due diversi casi

infinite soluzioni. Occorre quindi esaminare solo i seguenti due sottocasi:

$$\text{ii-a) } Q_i \neq Q_j \text{ e } P_i \neq P_j,$$

$$\text{ii-b) } Q_i = Q_j \text{ e } P_i = P_j.$$

Sottocaso ii-a)  $Q_i \neq Q_j$  e  $P_i \neq P_j$ ,

Il sistema (17) ammette la seguente soluzione:

$$\begin{aligned} n_k &= 0, \quad n_j^2 = 1 - n_i^2, \\ n_i^2 &= (1-\nu) \frac{P_i Q_i - P_j Q_j}{(P_i - P_j)(Q_i - Q_j)} - \frac{Q_j}{2(Q_i - Q_j)} - \frac{P_j}{2(P_i - P_j)} \\ &+ \frac{\nu(Q_i + Q_j + Q_k)}{2(Q_i - Q_j)} + \frac{\nu(P_i + P_j + P_k)}{2(P_i - P_j)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove gli indici si intendono non sommati. Sostituendo nella (3) le (19)<sub>1,2</sub>, si ottiene:

impone:

$$P_i = P_j \text{ e } Q_i \neq Q_j \Rightarrow P_i = P_j = -\nu P_k, \quad (N.1)$$

$$P_i \neq P_j \text{ e } Q_i = Q_j \Rightarrow Q_i = Q_j = -\nu Q_k. \quad (N.2)$$

La condizione (N.1) corrisponde a  $E[\mathbf{P}]\mathbf{n} = \mathbf{0}$ , mentre la (N.2) a  $E[\mathbf{Q}]\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Quindi alla (N.1) corrisponde, tramite la equazione (2),  $\mathbf{g}_1 = \mathbf{0}$ , mentre la condizione (N.2) equivale alla condizione di carico neutro (localizzazione impossibile perchè  $E$  è stato assunto definito positivo). Se la (N.1) o la (N.2) risultano verificate, la soluzione è da cercarsi per le altre permutazioni di  $k$  o nei casi (i) e (iii).

$$H^1/(2G) = n_i^2 \left\{ 2(P_i Q_i - P_j Q_j) - \frac{1}{1-\nu} \left[ (P_i - P_j) Q_j + (Q_i - Q_j) P_j \right] + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{1-\nu} \left[ \text{tr } Q (P_i - P_j) + \text{tr } P (Q_i - Q_j) \right] \right\} - n_i^4 \frac{1}{1-\nu} (P_i - P_j)$$

$$(Q_i - Q_j) - P_i Q_i - P_k Q_k - \frac{\nu}{1-\nu} (Q_i + Q_k)(P_i + P_k), \quad (3.20)$$

dove gli indici non sono sommati. Sostituendo quindi nella (20) la (19)<sub>3</sub> si ottiene il valore del modulo di incrudimento corrispondente all' estremo (19):

$$H^1/(2G) = \left[ P_j^2 Q_i^2 + 2\nu P_j P_k Q_i^2 + \nu^2 P_k^2 Q_i^2 - 2 P_i P_j Q_i Q_j - 2\nu P_i P_k Q_i Q_j \right. \\ - 2\nu P_j P_k Q_i Q_j - 2\nu^2 P_k^2 Q_i Q_j + P_i^2 Q_j^2 + 2\nu P_i P_k Q_j^2 + \nu^2 P_k^2 Q_j^2 \\ - 2\nu P_i P_j Q_i Q_k + 2\nu P_j^2 Q_i Q_k - 4P_i P_k Q_i Q_k + 2\nu^2 P_i P_k Q_i Q_k \\ + 4P_j P_k Q_i Q_k - 2\nu^2 P_j P_k Q_i Q_k + 2\nu P_i^2 Q_j Q_k - 2\nu P_i P_j Q_j Q_k \\ + 4P_i P_k Q_j Q_k - 2\nu^2 P_i P_k Q_j Q_k - 4P_j P_k Q_j Q_k + 2\nu^2 P_j P_k Q_j Q_k + \nu^2 P_i^2 Q_k^2 \\ \left. - 2\nu^2 P_i P_j Q_k^2 + \nu^2 P_j^2 Q_k^2 \right] \frac{1}{4(1-\nu)(P_i - P_j)(Q_i - Q_j)}. \quad (3.21)$$

Si noti che per ottenere una soluzione ammissibile, le componenti dei tensori  $P$  e  $Q$  nelle (19) devono essere tali da fornire un valore di  $n_i^2$  interno all' intervallo  $[0, 1]$ . Se questo non accade, il corrispondente valore del modulo di incrudimento (21) rappresenta un estremo esterno al campo di definizione della (3). In questo caso occorre trovare l' estremo non analitico che corrisponde ad uno dei due possibili valori  $n_i^2 = 1$  oppure  $n_i = 0$ , ovvero esaminare il caso (iii).

Le componenti del vettore  $\mathbf{g}$ , si ottengono dalla (4) nella forma:

$$\begin{aligned} g_i &= \left\{ 2P_i - \frac{1}{1-\nu} \left[ n_i^2 (P_i - P_j) + P_j \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{tr} \mathbf{P} \right\} n_i, \\ g_j &= \left\{ 2P_j - \frac{1}{1-\nu} \left[ n_i^2 (P_i - P_j) + P_j \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{tr} \mathbf{P} \right\} n_j, \\ g_k &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sottocaso ii-b)  $Q_i = Q_j$  e  $P_i = P_j$ .

I tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  risultano simmetrici rispetto all' asse  $k$ . Il sistema (17) ammette  $\infty^1$  soluzioni e le componenti della banda lungo gli assi  $i$  e  $j$  risultano indeterminate. D' altra parte, ad ogni coppia di valori di  $n_i^2$  ed  $n_j^2$  la (3) associa lo stesso valore estremo del modulo di incrudimento. Quindi, senza perdita di generalità, il valore estremo del modulo di incrudimento può essere determinato assumendo nulla una delle due componenti di  $\mathbf{n}$  secondo gli assi  $i$  e  $j$  (caso iii). Se l' estremo ottenuto in questo modo rappresenta il massimo del modulo plastico (nei casi (i), (ii) e (iii)), il numero delle possibili bande risulta infinito. Utilizzando la (4) è facile controllare che il cinematismo di localizzazione corrisponde ad un modo di "split".

*Per ottenere tutti gli estremi del modulo critico all' indice  $k$  vanno attribuiti tutti i valori 1, 2, 3.*

**iii) - due componenti del versore  $\mathbf{n}$  sono nulle.**

La normale alla banda risulta in questo caso ortogonale a due assi principali dei tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ . Se si suppone che  $n_i = 1$ ,  $n_j = n_k = 0$ , l' estremo corrispondente del modulo di incrudimento risulta:

$$H^1 = - \frac{2G}{1-\nu} \left[ P_k Q_k + P_j Q_j + \nu (P_k Q_j + P_j Q_k) \right], \quad (3.23)$$

per ottenere tutti gli estremi, occorre considerare tutte le permutazioni (i, j, k) di (1, 2, 3). Il vettore  $\mathbf{g}$  corrispondente all'estremo (23) ha componenti:

$$g_i = P_i + \frac{\nu}{1-\nu} (P_j + P_k), \quad g_j = g_k = 0. \quad (3.24)$$

Dalle (24) si deduce, tramite la (4), che questo tipo di localizzazione corrisponde ad un modo di "split".

*Il modulo critico per la localizzazione si ottiene individuando il massimo valore tra tutti gli estremi corrispondenti ai casi (i), (ii) ed (iii).*

Da un esame delle soluzioni (i), (ii) ed (iii), si rileva che nei casi di legge di flusso plastico associata o con sola componente deviatorica del flusso plastico associata, escludendo i casi di simmetrie dei tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , la normale alla banda risulta essere sempre ortogonale ad una direzione principale di  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  (e quindi anche di  $\mathbf{T}$ ).

#### 7.4 LEGGI DI FLUSSO CON COMPONENTE DEVIATORICA ASSOCIATA

Il caso delle leggi di flusso plastico con componente deviatorica associata (cfr. § 3.10) risulta particolarmente interessante in vista delle applicazioni. La condizione di localizzazione è stata risolta da Bigoni e Hueckel (1990 b). Il versore normale alle possibili bande di taglio deve risultare ora sempre normale ad una delle direzioni principali di  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ . Gli estremi del modulo plastico da considerarsi nella ricerca del

massimo, sono quelli che si ottengono nei casi (ii) ed (iii) del paragrafo precedente. Di seguito vengono riportate direttamente le soluzioni corrispondenti agli estremi del modulo plastico (3.3) e si omette per brevità la discussione delle possibili simmetrie dei tensori. Le componenti (19) si particolarizzano ora come segue:

$$n_i^2 = \frac{Q_i + \nu Q_k}{Q_i - Q_j} + \frac{\xi(1 + \nu)}{2(Q_i - Q_j)}, \quad (4.1)$$

$$n_j^2 = 1 - n_i^2, \quad n_k = 0,$$

e, nel caso risulti  $n_i^2 \notin [0,1]$ , la soluzione non è ammissibile (Cfr. § 7.3). Alle (1) corrispondono i seguenti valori delle componenti di  $\mathbf{g}$ :

$$\begin{aligned} g_i &= \left[ Q_i - Q_j + \xi \frac{1 + \nu}{2(1 - \nu)} \right] n_i, \\ g_j &= \left[ Q_j - Q_i + \xi \frac{1 + \nu}{2(1 - \nu)} \right] n_j, \\ g_k &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

mentre la (3.21) si riduce a:

$$H^1 = (1 + \nu) \frac{G}{2} \left[ \xi^2 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} - 4 \xi Q_k - 4 Q_k^2 \right]. \quad (4.3)$$

Nel caso in cui:

$$n_i = 1, \quad n_j = n_k = 0, \quad (4.4)$$

la soluzione corrispondente alla banda ortogonale ad una direzione principale del tensore  $\mathbf{Q}$ , risulta:

$$H^1 = - \frac{2G}{1 - \nu} \left[ (Q_j + \nu Q_k)^2 + \xi(1 + \nu)(Q_k + Q_j) \right] - 2G(1 + \nu) Q_k^2. \quad (4.5)$$

I valori delle componenti del vettore  $\mathbf{g}$ , che si ricavano dalle (4), risultano:

$$\begin{aligned} g_i &= Q_i + \frac{\nu}{1-\nu} (Q_j + Q_k) + \xi \frac{1+\nu}{1-\nu}, \\ g_j &= g_k = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

## 7.5 LEGGE DI FLUSSO ASSOCIATA

Questo caso, risolto da Bigoni e Hueckel (1989 b, 1990 a), può essere dedotto dal caso generale trattato nel § 7.3 ponendo  $\mathbf{P}=\mathbf{Q}$ , oppure può essere dedotto dal caso del § 7.4 ponendo  $\xi=0$ . Le componenti (19) diventano:

$$\begin{aligned} n_i^2 &= \frac{Q_i + \nu Q_k}{Q_i - Q_j} \\ n_j^2 &= 1 - n_i^2, \quad n_k = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

e, nel caso risulti  $n_i^2 \notin [0,1]$ , la soluzione non è ammissibile (cfr. § 3.7). Alle (1) corrispondono i seguenti valori delle componenti di  $\mathbf{g}$ :

$$\begin{aligned} g_i &= (Q_i - Q_j) n_i \\ g_j &= (Q_j - Q_i) n_j, \quad g_k = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

La (3.21) si riduce a:

$$H^1 = -2 G (1 + \nu) Q_k^2. \quad (5.3)$$

La discontinuità della velocità di deformazione nella banda risulta dalla sostituzione delle (1) e (2) nelle (2.16-2.18):

$$\begin{aligned} \llbracket D_i \rrbracket &= Q_i + \nu Q_k, \\ \llbracket D_j \rrbracket &= Q_j + \nu Q_k, \\ \llbracket D_k \rrbracket &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Il modulo di incrudimento corrispondente a:

$$n_i = 1, n_j = n_k = 0, \quad (5.5)$$

risulta:

$$H^1 = -2 G (1 + \nu) Q_k^2 - 2 G \frac{1}{1 - \nu} (Q_j + \nu Q_k)^2, \quad (5.6)$$

che è inferiore al modulo di incrudimento (3).

Dalla (3) e dalla (6) si osserva che il modulo di incrudimento critico per la localizzazione, in presenza di legge di flusso associata, non può mai essere positivo. Questo risultato è stato ottenuto, per via diversa, da Rice (1976).

Dalla (1) si può notare che la normale alla banda giace nel piano principale individuato dalle componenti principali  $T_i$  e  $T_j$  di  $T$  (essendo  $T$  e  $Q$  coassiali). Se il valore minimo di  $Q_k^2$  corrisponde alla direzione della tensione principale minima e le corrispondenti componenti di  $n$  sono ammissibili, la normale alla banda risulta ortogonale alla direzione della tensione principale minore. Questo risultato apparentemente sorprendente<sup>23</sup> si verifica effettivamente in alcuni casi, come mostrato da Rudnicki e Rice (1975) impiegando la superficie di snervamento di Drucker-Prager. Questa circostanza non risulta ovviamente esclusa nel caso della legge di flusso non associata.

---

<sup>23</sup> E' in contrasto, ad esempio, con la ipotesi, largamente adottata in geomeccanica, che le superfici di scorrimento si formino ortogonalmente al piano della tensione principale minima e massima (piano al quale deve appartenere la normale alla banda).

## 7.6 STATO PIANO DI DEFORMAZIONE E DI TENSIONE

### - Stato piano di deformazione, legge di flusso non associata

Nel caso dello stato piano di deformazione si assume che la posizione della banda sia vincolata a priori. In particolare si suppone che la normale alla banda debba giacere nel piano della deformazione. Nel modello che è stato introdotto nel Cap. 4 per lo stato di deformazione piana si suppone, coerentemente con il vincolo di deformazione piana, che risulti nulla la somma delle velocità di deformazione elastica e plastica nella direzione ortogonale al piano di deformazione. I risultati ottenuti nel § 7.3 valgono anche nel caso della deformazione piana tenendo conto che il caso (i) non va considerato e purchè nel caso (ii) l'indice  $k$  denoti la componente ortogonale al piano della deformazione. Per particolarizzare i risultati del § 7.3 ai modelli bidimensionali ove i tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  sono definiti in  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ , basta imporre  $P_k = Q_k = 0$ .

### - Stato piano di tensione, legge di flusso non associata

Nel caso dello stato piano di tensione, le condizioni di compatibilità cinematica sulla superficie di discontinuità (2.6) vengono imposte su un solido considerato bidimensionale (cfr. Hill 1952, Prager 1954, Thomas 1961 b). Ovvero la banda si riduce ad una linea ed i vettori  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{g}$  hanno due componenti.

#### Proposizione 1.:

Nel caso della teoria infinitesima il modulo di incrudimento critico per la localizzazione della deformazione in uno stato piano di sforzo, per il solido di confronto tipo Hill e la soluzione del seguente problema di massimo vincolato:

$$H_{cr}^1 = \max_{\mathbf{n}} \left\{ 2G \left[ 2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{Q}} - (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{P}} \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{n}) - \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{Q}} - \nu (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{n} - \text{tr } \bar{\mathbf{Q}})(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{P}} \mathbf{n} - \text{tr } \bar{\mathbf{P}}) \right] \right\}, \quad (6.1)$$

soggetto al vincolo

$$|\mathbf{n}| = 1. \quad (6.2)$$

Il vettore  $\mathbf{g}^1$  risulta:

$$\mathbf{g}^1 = 2 \bar{\mathbf{P}}\mathbf{n} - (1 + \nu)(\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{P}}\mathbf{n})\mathbf{n} + \nu (\text{tr } \bar{\mathbf{P}})\mathbf{n}. \quad (6.3)$$

Nelle (1-3)  $\bar{\mathbf{P}}$  e  $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{g}$  ed  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ .

La dimostrazione è identica a quella riportata per il caso tridimensionale.

Si ricava di seguito una espressione esplicita per il problema di massimo vincolato (1)-(2)<sup>24</sup>. La tecnicaolutiva è del tutto analoga (seppure più semplice) a quella impiegata nel § 7.3 e non verranno quindi forniti tutti i dettagli.

Trasformando il problema di massimo vincolato (1-2) in un problema di estremo libero tramite la introduzione di un moltiplicatore di Lagrange e imponendo le condizioni di stazionarietà, ci si riduce al seguente sistema:

$$\begin{aligned} n_1^2 \left[ Q_1 (P_1 - P_2) + P_1 (Q_1 - Q_2) \right] + n_2^2 \left[ Q_2 (P_1 - P_2) + P_2 (Q_1 - Q_2) \right] = \\ = 2 (P_1 Q_1 - P_2 Q_2), \end{aligned}$$

$$n_1^2 + n_2^2 = 1. \quad (6.4)$$

Se si suppone  $n_1^2 \neq 0$  ed  $n_2^2 \neq 0$ , il sistema (4) ammette una soluzione unica se  $Q_1 \neq Q_2$  e  $P_1 \neq P_2$ , ammette infinite soluzioni se  $Q_1 = Q_2$  e

---

<sup>24</sup>Per non appesantire la scrittura si omettono, nel seguito del paragrafo, i soprassegni ai tensori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ .

$P_1 = P_2$ , non ammette soluzione se  $Q_1 = Q_2$  e  $P_1 \neq P_2$  oppure se  $Q_1 \neq Q_2$  e  $P_1 = P_2$ .

Vengono esaminati i seguenti casi:

- 1)  $Q_1 \neq Q_2$  e  $P_1 \neq P_2$ ,
- 2)  $Q_1 = Q_2$  e  $P_1 \neq P_2$  o  $Q_1 \neq Q_2$  and  $P_1 = P_2$ ,
- 3)  $Q_1 = Q_2$  e  $P_1 = P_2$ .

Caso 1)  $Q_1 \neq Q_2$  e  $P_1 \neq P_2$ .

Il problema (1-2) ammette un solo estremo analitico, corrispondente alla seguente inclinazione della banda di taglio:

$$n_1^2 = \frac{P_1}{2(P_1 - P_2)} + \frac{Q_1}{2(Q_1 - Q_2)}, \quad (6.5)$$

$$n_2^2 = 1 - n_1^2,$$

se tale inclinazione è ammissibile (ovvero  $n_i^2 \in [0,1]$ ) e corrisponde ad un massimo, il modulo di incrudimento critico per la localizzazione risulta:

$$H_{cr}^1 = 2 G (1 + \nu) \frac{(P_1 Q_2 - P_2 Q_1)^2}{4(P_1 - P_2)(Q_1 - Q_2)}, \quad (6.6)$$

altrimenti il modulo di incrudimento critico risulta:

$$H_{cr}^1 = \max_{i=1,2} - 2 G (1 + \nu) P_i Q_i, \quad (6.7)$$

corrispondente alla inclinazione:

$$n_i = 1, n_j = 0. \quad (6.8)$$

Alla (5) corrispondono le seguenti componenti di  $\mathbf{g}$ :

$$g_1 = \left\{ 2 P_1 - (1 + \nu) \left[ n_1^2 (P_1 - P_2) + P_2 \right] + \nu (P_1 + P_2) \right\} n_1, \quad (6.9)$$

$$g_2 = \left\{ 2 P_2 - (1 + \nu) \left[ n_1^2 (P_1 - P_2) + P_2 \right] + \nu (P_1 + P_2) \right\} n_2,$$

mentre alla (8) corrispondono le seguenti componenti di  $\mathbf{g}$ :

$$g_i = P_i + \nu P_j, \quad g_j = 0. \quad (6.10)$$

Caso 2)  $Q_1 = Q_2$  e  $P_1 \neq P_2$  o  $Q_1 \neq Q_2$  e  $P_1 = P_2$ .

In questo caso il modulo critico è fornito dalla (7).

Caso 3)  $Q_1 = Q_2$  e  $P_1 = P_2$ .

In questo caso l' inclinazione della banda risulta indeterminata rispetto agli assi principali. Il modulo di incrudimento critico è fornito dalla (7). Il cinematismo nella banda corrisponde ad un modo di "split".

- *Legge di flusso associata: stato piano di tensione*

Il problema (1-2) ammette un solo estremo analitico, corrispondente alla seguente inclinazione della banda di taglio:

$$n_1^2 = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2}, \quad n_2^2 = 1 - n_1^2. \quad (6.11)$$

Se  $n_1^2 \in [0,1]$  alla (11) corrisponde il modulo di incrudimento critico per la localizzazione:

$$H_{cr}^1 = 0. \quad (6.12)$$

Viceversa, se  $n_1^2 \notin [0,1]$  si ha:

$$H_{cr}^1 = \max_{i=1,2} -2 G(1+\nu) Q_i^2, \quad (6.13)$$

corrispondente alla inclinazione di banda (8).

Alle componenti (11) del versore  $\mathbf{n}$  corrispondono le seguenti componenti di  $\mathbf{g}$ :

$$g_1 = (Q_1 - Q_2) n_1, \quad g_2 = - (Q_1 - Q_2) n_2, \quad (6.14)$$

che, assieme alle (11) forniscono le seguenti componenti del salto della velocità di deformazione attraverso la banda:

$$[[D_1]] = Q_1, \quad [[D_2]] = Q_2. \quad (6.15)$$

- Osservazioni: plasticità perfetta con legge di flusso associata

Stato piano di deformazione:

- i.) Al collasso la componente elastica della velocità di deformazione risulta nulla e deve quindi risultare  $Q_k = 0$ . Dall'equazione (5.3) si deduce  $H_{cr}^1 = 0$ . Quindi al collasso è possibile la formazione di bande di discontinuità della deformazione.
- ii.) Se oltre alle ipotesi del caso precedente, si suppone anche che il flusso plastico sia isocorico, al collasso deve valere la relazione:  $Q_i = -Q_j$ . Dalla (5.1) si deduce che la banda risulta inclinata di  $45^\circ$  rispetto alle direzioni principali dello sforzo ( $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{Q}$  sono coassiali).

Stato piano di tensione:

- iii.) Nel caso della superficie di snervamento di Huber-von Mises la (6.11) fornisce, nel caso della trazione semplice, una inclinazione della banda di taglio di  $54.73^\circ$  rispetto alla direzione della trazione, che coincide con la soluzione della lastra sottile in trazione (Hill 1952, Prager 1954,

Thomas 1954, 1961 b).

## 7.7 CONFRONTI CON IL CRITERIO DELLA DEFINITEZZA POSITIVA DEL TENSORE COSTITUTIVO

Si è visto (cfr. § 5.4 e 5.5) come la definitezza positiva del tensore costitutivo rappresenti un criterio sufficiente per escludere la perdita di unicità del problema elastoplastico incrementale, in presenza di associatività e non-associatività della legge di flusso. Le relazioni esistenti tra i diversi criteri locali e integrali di stabilità e unicità della soluzione incrementale, precedentemente discussi, sono riportati nella Fig. 7.1. Nella figura le frecce rappresentano implicazioni nell'ambito della teoria infinitesima. In generale, la perdita di definitezza positiva del tensore costitutivo (condizione locale sufficiente di unicità) precede la perdita di ellitticità forte e la localizzazione della deformazione (i.e. la perdita di ellitticità). Ovviamente, la violazione della condizione locale sufficiente di unicità non implica necessariamente la perdita della condizione integrale di unicità della soluzione del problema incrementale. Peraltro, se si considerano problemi omogenei e con condizioni al contorno di sole forze, il criterio locale coincide con il criterio integrale di unicità, che a sua volta coincide con il criterio di stabilità. Anche in questo caso tuttavia la violazione della condizione sufficiente di unicità non implica necessariamente la perdita di unicità, perchè il campo di velocità di deformazione, che corrisponde alla perdita di definitezza positiva, può non soddisfare le assegnate condizioni al contorno sulle forze.

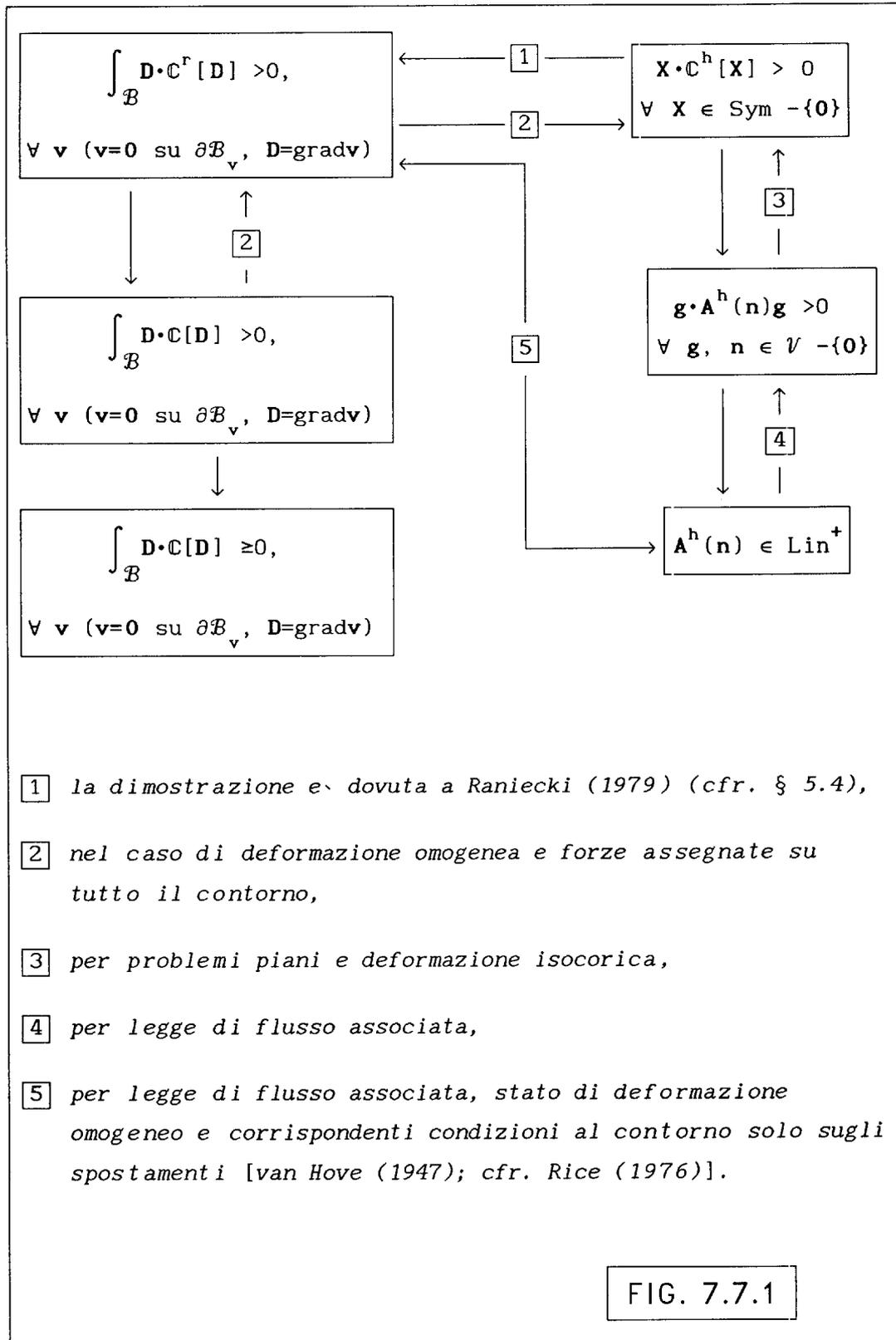


FIG. 7.7.1

Assegnata una superficie di snervamento nello spazio di Haigh-Westergaard, è possibile individuare le superfici che corrispondono, nel caso di percorsi di sforzo radiali, alla perdita di definitezza positiva del tensore costitutivo (superficie di biforcazione) e alla localizzazione della deformazione (superficie di localizzazione)<sup>25</sup>. In generale, la superficie di biforcazione risulta distinta dalla superficie di localizzazione, come si può dedurre dallo schema di Fig. 7.1. Sempre da tale schema, si deduce ancora che nel caso particolare di plasticità associata e deformazione piana e isocorica le due superfici coincidono.

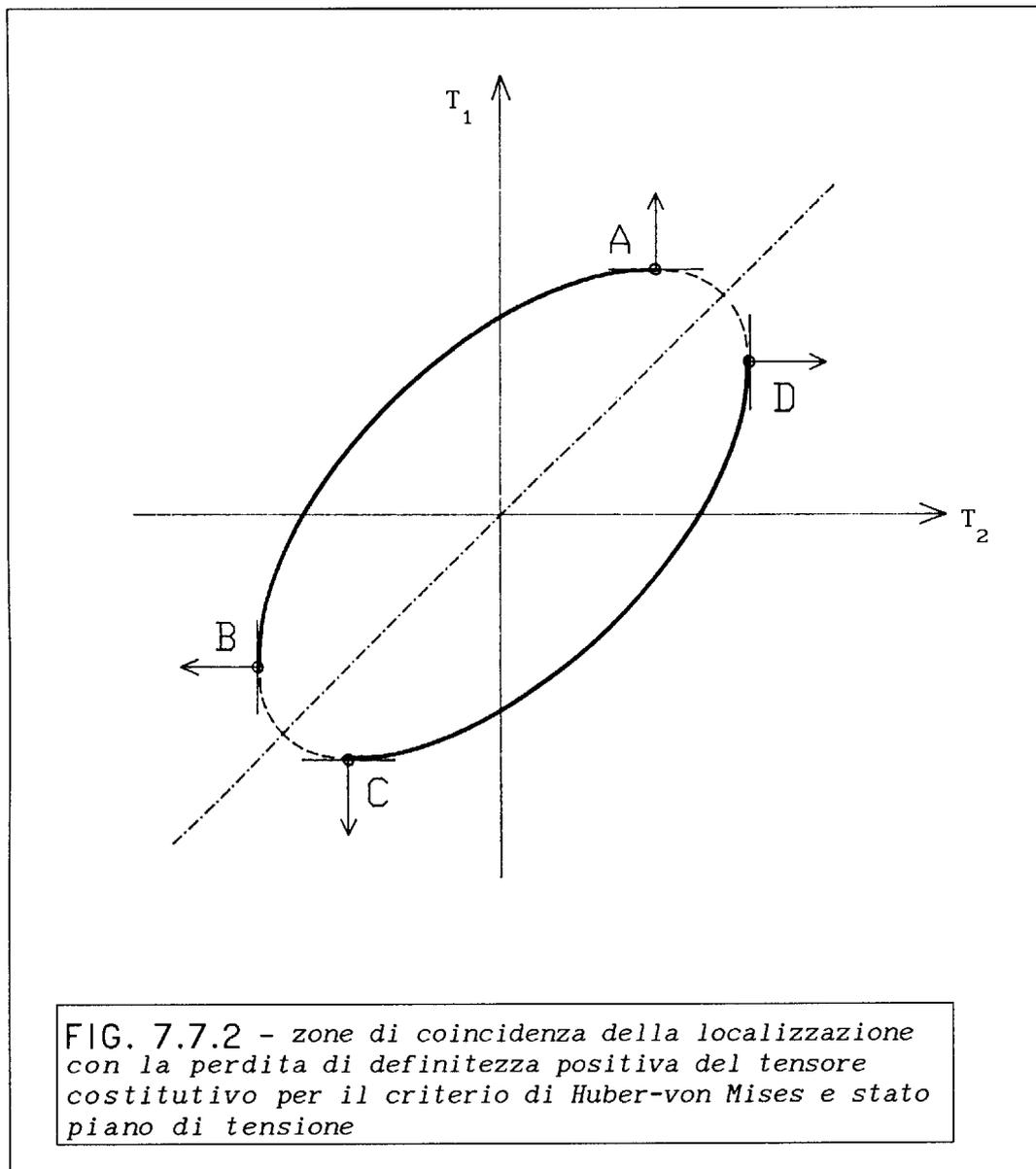
Se si confrontano le formule (5.1-5.4) con le (4.5.17-4.5.18) e le formule (6.10-6.13) con le (4.3.1-4.3.2), se ne deduce che nei casi piani di tensione e deformazione (con legge di flusso associata) la condizione di localizzazione della deformazione in bande di taglio (a differenza della localizzazione con modo di "split") coincide con la perdita di definitezza positiva del tensore costitutivo. La coincidenza delle (5.1-5.4) con le (4.5.17-4.5.18) e delle (6.10-6.13) con le (4.3.1-4.3.2), autorizza quindi a concludere che per stati piani di tensione e deformazione, esistono delle zone dove le superfici di biforcazione coincidono con le superfici di localizzazione. La superficie di biforcazione coincide con la superficie di localizzazione nel caso, ad esempio, di deformazione piana, criterio di snervamento di Huber-von Mises con legge di flusso associata e nell' ipotesi che la tensione ortogonale al piano di deformazione sia quella intermedia.

Nella Fig. 7.7.2 sono riportate le superfici di

---

<sup>25</sup> Il concetto di superficie di biforcazione è stato introdotto da Mróz (1985). Lo stesso autore indica inoltre le superfici ove risulta nullo il modulo di incrudimento come "superfici limite". Nel caso della legge di flusso associata le superfici di biforcazione e le superfici limite coincidono.

biforcazione e localizzazione nel caso di legge di flusso associata, stato piano di tensione e criterio di Huber-von Mises.



La superficie di localizzazione, per  $H=0$ , è rappresentata dai due

tratti di ellisse A-B e C-D. In questi due tratti essa coincide con la superficie di biforcazione (che coincide con la superficie di snervamento). La localizzazione avviene in bande di taglio nelle zone A-B e C-D, mentre nei punti A, B, C, D e nelle zone B-C e A-D la localizzazione avviene con modo di "split". Inoltre nelle zone B-C e A-D la localizzazione può avvenire solo in presenza di softening<sup>26</sup>.

---

<sup>26</sup> Si ritrovano quindi i risultati di Hill (1952), Prager (1954), Stören e Rice (1975), Thomas (1953, 1954, 1961 b, pp. 100-110).

## APPLICAZIONI AI MATERIALI FRAGILI - COESIVI

### 8.1 INTRODUZIONE

Numerosi materiali da costruzione non metallici, tra i quali quelli a matrice cementizia, presentano un diagramma sforzo-deformazione del tipo illustrato in Fig. 8.1.1, riferito ad una prova di compressione monoassiale a spostamento controllato<sup>1</sup>. Le deformazioni irreversibili che si producono in corrispondenza del carico massimo sono limitate e precedono un ramo di softening piuttosto pronunciato. Materiali di questo genere sono definiti, genericamente, come *fragili-coesivi*. Per caricamenti a breve termine questi materiali esibiscono inoltre le seguenti caratteristiche meccaniche fondamentali<sup>2</sup>:

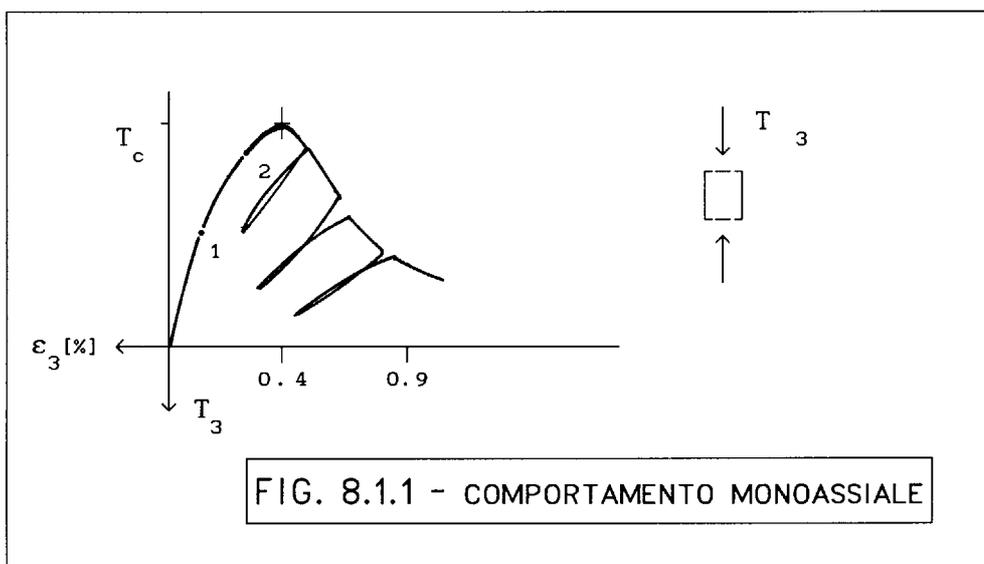
1. - comportamento non lineare e anelastico anche nell' ambito delle piccole deformazioni e rotazioni,
2. - comportamento "pressure sensitive", ovvero aumento della resistenza (e duttilità) all' aumentare della pressione di confinamento,

---

<sup>1</sup>Nella figura 8.1.1,  $T_3$  rappresenta lo sforzo di compressione e  $\epsilon_3$  la corrispondente deformazione.  $T_c$  indica il valore dello sforzo corrispondente al picco della curva.

<sup>2</sup>In letteratura tali materiali sono noti come "pressure sensitive" o "rock-like" (cfr. Rudnicki e Rice 1975).

3. - comportamento inelastico dilatante per stati tensionali deviatorici, comportamento contraente per stati tensionali di compressione isotropa<sup>3</sup>.



In questo capitolo verranno presi in considerazione i materiali a matrice cementizia. Tali materiali presentano una microstruttura complessa. Il comportamento macroscopico risulta infatti dalla distribuzione, tipologia ed interazione di vari micromeccanismi. Tali micromeccanismi sono lo scorrimento plastico, la nucleazione, la crescita e la coalescenza dei vuoti e la apertura o chiusura delle microfratture (Ortiz 1985, 1987). Nei modelli fenomenologici elastoplastici finora proposti per la descrizione del comportamento dei materiali a matrice cementizia<sup>4</sup>,

<sup>3</sup> Tale effetto può essere spiegato a livello microstrutturale (cfr., nel caso dei mezzi granulari, Rowe 1962).

<sup>4</sup> Cfr. Chen (1979, 1982), Chen e Chen (1975), Chen e Han (1988, § 7), Han e Chen (1986, 1987), Murray et al. (1979), Ortiz (1985,

non è stata considerata esplicitamente la possibilità della localizzazione della deformazione<sup>5</sup>. Il comportamento dei materiali a matrice cementizia risulta invece fortemente influenzato dalla formazione e crescita di discontinuità macroscopiche nelle deformazioni, che possono essere ritenute responsabili dell'effetto dimensionale ("size effect") e di comportamenti instabili di vario tipo (Carpinteri 1985, 1986, 1989, Di Tommaso 1984). Questi comportamenti, che possono essere studiati a livello micromeccanico, vengono qui discussi dal punto di vista della meccanica del continuo, facendo ricorso alla teoria della localizzazione della deformazione (Rice 1976, Cfr. § 7).

Nel presente Capitolo, si presentano dapprima le principali caratteristiche di comportamento meccanico del conglomerato cementizio. Si riportano quindi i risultati sperimentali sulla localizzazione della deformazione, ottenuti al Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) e solo parzialmente pubblicati da Benaija (1991) e Torrenti<sup>6</sup>. Si discute quindi la possibilità di descrivere propriamente la condizione di localizzazione della deformazione nel caso della prova di compressione monoassiale (l' unica adeguatamente documentata sperimentalmente). Una applicazione della condizione esplicita per la localizzazione ottenuta nel Cap. 7, consente di ricavare, sulla base dei risultati sperimentali ottenuti presso il LCPC, alcune informazioni generali sulle caratteristiche che deve soddisfare un legame elastoplastico allo scopo di interpretare la localizzazione della deformazione nei materiali a matrice cementizia. In

---

1987), Ortiz e Popov (1982 a, b), Pietruszczak et al. (1988), Torrenti (1987), Willam e Warnke (1975).

<sup>5</sup> Se si esclude il modello di Ortiz (1987).

<sup>6</sup> Tali risultati sono stati ottenuti nell' ambito di un vasto programma sperimentale promosso dall' "European GRECO geomateriaux". I primi risultati sono stati presentati in Torrenti e Benaija (1990) Torrenti et al. (1989 a, b, c, 1990).

particolare, nell' ambito dei modelli costitutivi presentati nel § 3.2 (materiale isotropo, superfici di snervamento lisce, flusso plastico associato e non), si conclude che, impiegando la legge di flusso associata, non è possibile modellare la localizzazione della deformazione nella prova di compressione monoassiale sul conglomerato cementizio semplice e fibrorinforzato. Inoltre, la superficie di snervamento, al fine di una corretta interpretazione della localizzazione della deformazione nei materiali a matrice cementizia, deve intersecare l' asse idrostatico nel verso della compressione (oltre che, ovviamente, nel verso della trazione).

## 8.2 COMPORTAMENTO MECCANICO DEI MATERIALI A MATRICE CEMENTIZIA

Vengono nel seguito riassunte le caratteristiche principali del comportamento meccanico del conglomerato cementizio (Di Tommaso 1984, Di Tommaso e Di Leo 1987, Torrenti 1987).

### - *COMPRESSIONE SEMPLICE*

Con riferimento alla fig. 8.1.1, dove  $T_c$  indica il valore massimo della tensione, si distinguono qualitativamente quattro zone:

- 1)  $0 - 0.3/0.6 T_c$   
- comportamento approssimativamente elastico lineare
- 2)  $0.3/0.6 T_c - 0.9 T_c$   
- comportamento non lineare ed inelastico
- 3)  $0.9 T_c - T_c$   
- comportamento fortemente non lineare ed inelastico  
- le deformazioni sono accompagnate da una dilatanza volumetrica<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup> La dilatanza è dovuta alla presenza dell' aggregato. La malta da sola non esibisce infatti comportamento marcatamente dilatante

4) oltre  $T_c$

- ramo di softening dipendente dal rapporto base/altezza del campione<sup>8</sup>
- forte degrado elastico (allo scarico)<sup>9</sup>
- comparsa di fratture dirette lungo la direzione della compressione.

- *COMPRESSIONE BIASSIALE*

In letteratura<sup>10</sup> vengono riportate curve tensione-deformazione qualitativamente analoghe a quelle che si ricavano dalla prova di compressione semplice. A prova terminata si osservano fratture parallele al piano di carico. Il luogo dei punti corrispondente al raggiungimento della tensione di picco per varie storie di carico è riportato, qualitativamente, nella Fig. 8.2.1.

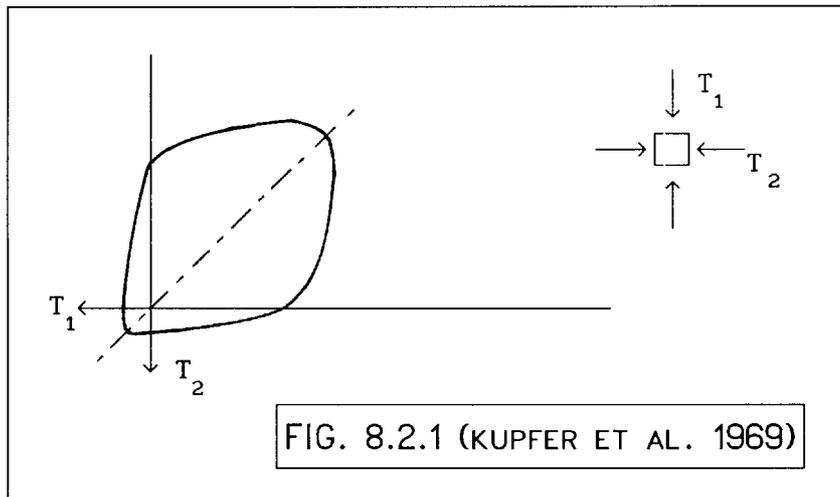
---

(Shah e Chandra 1968).

<sup>8</sup> van Mier (1984) ha mostrato che a rapporti altezza/base del campione crescenti, corrispondono rami di softening più pronunciati.

<sup>9</sup> Il tentativo di interpretare con un modello matematico tale effetto, ben documentato sperimentalmente anche nel caso delle rocce e delle terre, ha originato i modelli "elasto(plastici)-fratturanti" di Dougill (1976) e di Hueckel (1975, 1976). Tali modelli sono stati analizzati da Capurso (1979), Hueckel e Maier (1977), Maier e Hueckel (1979), Dafalias (1977) e recentemente sono stati applicati alla modellazione del conglomerato cementizio (Han e Chen 1986, Chen e Han 1988 § 7). In Bigoni e Hueckel (1991 b) viene analizzata, nell'ambito di un particolare modello elastoplastico-fratturante, valido nel caso di mezzi granulari, la possibilità della localizzazione della deformazione e della perdita di definitezza positiva del lavoro del secondo ordine in prove triassiali con pressione isotropa costante.

<sup>10</sup> Kupfer et al. (1969), Liu et al. (1972), Tasuji et al. (1978).

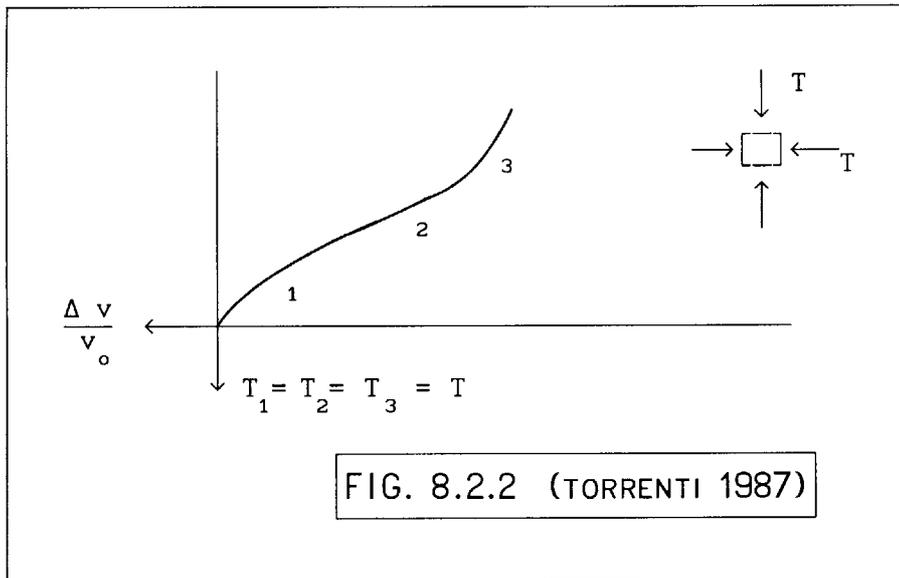


- *COMPRESSIONE ISOTROPA*

Il comportamento<sup>11</sup> è qualitativamente descritto nella Fig. 8.2.2. Si possono distinguere tre zone. La prima, ove il comportamento è approssimativamente elastico lineare, è seguita da una seconda zona dove il comportamento diventa inelastico (a seguito della chiusura progressiva dei vuoti interni) e da una terza zona dove il materiale diviene via via più rigido<sup>12</sup>.

<sup>11</sup>Cfr. Torrenti (1987).

<sup>12</sup>Nella terza zona il materiale risulta polverizzato.



### - COMPRESSIONE TRIASSIALE<sup>13</sup>

I risultati sono qualitativamente simili alla compressione semplice (Palaniswamy e Shah 1974). La duttilità cresce per pressioni di confinamento crescenti.

### - TRAZIONE SEMPLICE

Si osserva una rottura fragile ad un valore dello sforzo pari a circa un decimo/quindicesimo della tensione di picco in compressione semplice. A fine prova si osserva un piano di frattura ortogonale alla direzione della trazione<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> Per "prova di compressione triassiale", si intende una prova di compressione su un campione cilindrico di sezione circolare, durante la quale viene controllato il carico assiale e la pressione sulla superficie laterale.

<sup>14</sup> Questo risultato sperimentale è descritto dal modello proposto da Hillerborg (1984) ed esteso da Carpinteri et al. (1986).

### - TRAZIONE E COMPRESSIONE

Con questo tipo di prova<sup>15</sup> un campione prismatico viene sottoposto ad una compressione in una direzione ed una trazione in una direzione ortogonale alla precedente. Per tensioni di trazione superiori a circa il 7.5% della tensione di compressione, la rottura è del tipo che si osserva in trazione semplice. Le trazioni a rottura risultano in ogni caso inferiori alla tensione di rottura in trazione semplice.

#### La localizzazione della deformazione

L' interesse nella individuazione e interpretazione di tale fenomeno per i materiali a matrice cementizia è recente (Ortiz 1987, 1989, Torrenti 1986, 1987). Sono disponibili, in forma preliminare, solamente i risultati sperimentali ottenuti al LCPC<sup>16</sup> relativi alla localizzazione della deformazione nella prova di compressione semplice.

Le prove sono state condotte su campioni prismatici di altezza 12 cm, larghezza 6 cm e spessore 2 cm, confezionati con conglomerato cementizio con inerte di diametro massimo pari a 4 mm. Sono state eseguite prove su campioni di conglomerato cementizio semplice e rinforzato con fibre metalliche. La localizzazione della deformazione è stata rilevata utilizzando la

---

<sup>15</sup> Cfr. Torrenti (1987).

<sup>16</sup> Benaija (1991), Torrenti e Benaija (1990), Torrenti et al. (1989 a, b, c, 1990). I risultati definitivi saranno riportati nella tesi di dottorato di Benaija (1991). Alcuni risultati, non ancora presentati ufficialmente, sono stati messi a disposizione dello scrivente durante una sua visita al LCPC (settembre 1990).

tecnica stereofotogrammetrica messa a punto da Desrues<sup>17</sup> e ampiamente descritta da Torrenti e Collaboratori. A questa tecnica sono state affiancate rilevazioni<sup>18</sup> interferometriche, di emissione acustica e repliche della superficie<sup>19</sup>.

Sono stati condotti quattro tipi diversi di prove, corrispondenti alle seguenti condizioni:

- rotazioni impedito in testa al campione e attrito non nullo tra le facce del campione ed i piatti della pressa,
- rotazioni impedito in testa al campione e attrito nullo<sup>20</sup> tra le facce del campione ed i piatti della pressa,
- rotazioni libere in testa al campione e attrito non nullo tra le facce del campione ed i piatti della pressa,
- rotazioni libere in testa al campione e attrito nullo tra le facce del campione ed i piatti della pressa.

Un risultato significativo, nel caso di una prova del quarto tipo, è riportato in Appendice A.1. Nella Figure in Appendice (Benaija 1991) sono rappresentati il diagramma forza-spostamento (Fig. A.1.1), le rotazioni in testa al campione riferite ai diversi istanti di prova (Fig. A.1.2), gli spostamenti rilevati in corrispondenza delle riprese fotogrammetriche (Fig. A.1.3), le mappe degli isovalori degli spostamenti orizzontali (Fig. A.1.4) e verticali (Fig. A.1.5), le dilatazioni superficiali (i rettangoli indicano zone di dilatanza) (Fig. A.1.6) e gli scorrimenti superficiali (i rettangoli indicano le zone soggette a deformazione tagliante) (Fig. A.1.7). Nelle figure è chiaramente

---

<sup>17</sup> Desrues (1983), Desrues et al. (1985).

<sup>18</sup> I primi risultati, non ancora pubblicati, tendono a confermare le rilevazioni eseguite con la tecnica stereofotogrammetrica.

<sup>19</sup> La replica viene ottenuta applicando, a diversi livelli di carico, delle pellicole plastiche sulla superficie del campione. Tali pellicole, esaminate al microscopio, rivelano lo stato di microfessurazione superficiale.

<sup>20</sup> Tale condizione è stata ottenuta inserendo dei blocchetti di duralluminio (con un rapporto  $E/\nu$  uguale a quello del conglomerato cementizio) tra il campione ed i piatti della pressa.

visibile lo sviluppo di due bande di taglio disposte ad "X" ed inclinate di circa  $26^\circ$  rispetto all'asse della compressione.

Dai risultati sperimentali ottenuti al LCPC si deducono, in sintesi, le seguenti informazioni:

1. - la localizzazione della deformazione avviene in assenza di effetti geometrici instabilizzanti (le rotazioni in testa al campione rimangono praticamente nulle ben oltre la localizzazione<sup>21</sup>).
2. - La localizzazione precede<sup>22</sup> sempre il picco della curva forza-spostamento<sup>23</sup>.
3. - Le bande di taglio hanno una inclinazione variabile tra i  $20^\circ$  e i  $40^\circ$  rispetto alla direzione di compressione.
4. - Il comportamento nel ramo di softening è poco ripetitivo e fortemente influenzato dalle condizioni di prova. In particolare l'inclinazione del ramo di softening aumenta all'aumentare della rotazione in testa.
5. - Nella zona dove avviene la localizzazione il materiale esibisce una deformazione volumetrica positiva (dilatanza).
6. - Il quadro fessurativo a fine prova non appare direttamente connesso con la cinematica che si osserva all'inizio della localizzazione. Sembra quindi che alla localizzazione segua una ridistribuzione tensionale di evoluzione complessa.
7. - Nel caso sia eliminato l'attrito tra i piatti della pressa e le facce del campione, non si osserva scarico elastico al di fuori della banda di taglio.
8. - Non tutte le prove evolvono in un chiaro quadro di localizzazione. Sono possibili (anche se rari) cinematismi di rottura differenti.

---

<sup>21</sup> il rapporto tra spostamenti all'inizio della rotazione e al picco cade nell'intervallo 1.1-1.34.

<sup>22</sup> Il rapporto tra tensione di picco e tensione alla localizzazione cade nell'intervallo 1-1.1.

<sup>23</sup> Un risultato analogo è stato rilevato sperimentalmente anche nelle sabbie (Cfr. Desrues 1990, Vardoulakis 1989).

Dai risultati precedenti possono trarsi le seguenti conclusioni:

1. - La teoria infinitesima è sufficiente ad interpretare la localizzazione delle deformazioni nei materiali a matrice cementizia.
2. - Il ramo di softening (ed anche il degrado elastico) può essere considerato un effetto causato dalla comparsa della banda di taglio (Ortiz 1989, Torrenti 1986) e pertanto può essere considerato un effetto "strutturale".

Allo stato attuale della ricerca non sono disponibili altri risultati sperimentali<sup>24</sup> e risulta quindi impossibile la formulazione di un modello costitutivo in grado di interpretare la localizzazione della deformazione per percorsi tensionali diversi dalla compressione semplice.

### 8.3 IL MODELLO DI RUDNICKI E RICE

Rudnicki e Rice (1975) hanno proposto, per la interpretazione della localizzazione della deformazione nei materiali "pressure sensitive"<sup>25</sup>, l'impiego di un modello elastoplastico con superficie di snervamento di Drucker-Prager e legge di flusso plastico con componente deviatorica associata (cfr. § 3.10).

Impiegando le soluzioni esplicite per le condizioni di perdita di ellitticità forte e di ellitticità (cfr. § 6.6 e

---

<sup>24</sup>La sperimentazione per percorsi tensionali diversi da quello monoassiale appare peraltro notevolmente difficoltosa e probabilmente possibile solo con tecniche indirette (ad esempio con tecniche di emissione acustica o tecniche microsismiche, cfr. Di Tommaso et al. 1989).

<sup>25</sup>Con particolare riferimento alle rocce (cfr. Cleary e Rudnicki 1976, Rudnicki 1977).

§ 7.3), si sono qui ottenuti i valori numerici dei moduli di incrudimento critici per la perdita di ellitticità forte e di ellitticità per il modello di Rudnicki e Rice. Nelle Tabelle 8.3.1 a, b, sono riportati, i valori dei moduli di incrudimento critico (normalizzati rispetto a G) per la perdita di definitezza positiva dell' operatore costitutivo, per la perdita di ellitticità forte e per la perdita di ellitticità (localizzazione) nel caso di compressione assialsimmetrica con pressione laterale costante (prova triassiale)<sup>26</sup>. Le Tabelle 8.3.2 a, b, riportano invece il caso di trazione assialsimmetrica a pressione laterale costante. Sono stati riportati i casi  $\nu=0$  (tabelle a) e  $\nu=0.3$  (tabelle b), per valori di  $trQ$  e  $trP$  compresi tra 0 e 0.9. Il caso  $trP=0$  corrisponde a deformazione plastica volumetrica nulla, mentre i valori positivi di  $trP$  corrispondono ad aumento di volume durante la deformazione plastica. I valori di  $trQ$  e  $trP$  riportati nelle tabelle comprendono, come sottolineato da Rudnicki e Rice (1975), una vasta classe di materiali rocciosi. Entro parentesi è stato indicato, in gradi, l' angolo  $\vartheta$  tra la direzione critica  $n$  e la direzione della tensione principale minore. I risultati numerici riportati permettono di trarre le seguenti conclusioni:

1. - Il modulo di incrudimento critico per la localizzazione della deformazione aumenta all' aumentare del grado di non-

---

<sup>26</sup> I risultati riportati da Rudnicki e Rice (1975) riguardo al caso di compressione assiale per  $\nu = 0.3$ ,  $trQ = 0.6$  e  $trQ = 0.9$  sono notevolmente differenti da quelli riportati nella Tab. 8.3.1 b. La differenza è dovuta ad un errore nella soluzione esplicita ottenuta da Rudnicki e Rice (1975) (ed in seguito riportata in Nikolaevskii e Rice (1979), Prevost (1984, 1987), Rice (1976), Needleman e Rice (1978), Rice e Rudnicki (1980)). La soluzione esplicita fornita da Rice e Rudnicki (per il caso Drucker-Prager con flusso plastico di componente deviatorica associata) coincide infatti con l' estremo (7.4.3). Tale estremo risulta non ammissibile (cfr. § 7.4) nei casi in cui i valori riportati nelle tabelle non coincidono con quelli riportati da Rudnicki e Rice (1975); in questi casi infatti il modulo critico coincide con un massimo non analitico.

associatività del legame<sup>27</sup> e diminuisce al crescere della apertura dell' angolo al vertice del cono che rappresenta (nello spazio di Haigh-Wstergaard) la superficie di snervamento<sup>28</sup>.

2. - La perdita di ellitticità forte coincide con la localizzazione della deformazione solo nel caso associato.
3. - La perdita di definitezza positiva dell' operatore costitutivo avviene per moduli di incrudimento nulli solo nel caso della plasticità associata.
4. - Nel caso della trazione, la localizzazione è possibile anche per valori positivi del modulo di incrudimento.

Ed infine:

5. - La localizzazione in compressione avviene sempre in presenza di incrudimento negativo.

Questa ultima caratteristica è in contrasto con i risultati sperimentali ottenuti al LCPC. Il modello di Drucker-Prager non risulta quindi appropriato per la descrizione della localizzazione nei materiali a matrice cementizia per stati di compressione monoassiale. D' altra parte non risulta appropriato neppure il modello proposto da Ortiz (1985), ove la possibilità di localizzazione della deformazione è esclusa per stati di compressione semplice (Ortiz 1987). La stessa circostanza si verifica inoltre nel modello elastoplastico-fratturante proposto da Bigoni e Hueckel (1991 b) per le applicazioni ai mezzi granulari. Nel prossimo paragrafo vengono esaminate le condizioni necessarie per definire un modello elastoplastico (del tipo introdotto nel § 3) che descriva la localizzazione della deformazione nella prova di compressione semplice, durante l' incrudimento positivo.

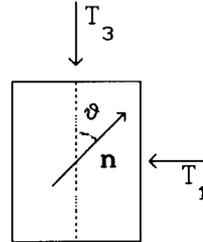
---

<sup>27</sup> Cioè al crescere del rapporto  $trQ/trP$ .

<sup>28</sup> Cioè al crescere di  $trQ$ .

Tab.8.3.1 a - Valori critici di  $H/G$  per compressione  
 assialsimmetrica ( $\vartheta$  in gradi in parentesi)

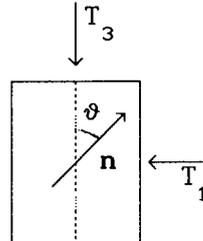
$$|T_1| = |T_2| < |T_3|$$



$trQ$	$trP$	Perdita di Definitezza Positiva	Perdita di Ellitticit� Forte	Perdita di Ellitticit�
$\nu = 0$				
0.3	0.00	0.015	-0.215(38.8)	-0.219(38.7)
0.3	0.15	0.004	-0.261(40.4)	-0.262(40.4)
0.3	0.30	0.000	-0.302(42.1)	-0.302(42.1)
0.6	0.00	0.057	-0.243(42.2)	-0.262(42.1)
0.6	0.15	0.031	-0.309(43.8)	-0.318(43.7)
0.6	0.30	0.013	-0.370(45.4)	-0.375(45.4)
0.6	0.45	0.003	-0.426(47.0)	-0.427(47.0)
0.6	0.60	0.000	-0.478(48.7)	-0.478(48.7)
0.9	0.00	0.120	-0.250(45.3)	-0.295(45.4)
0.9	0.15	0.080	-0.337(46.9)	-0.367(47.0)
0.9	0.30	0.049	-0.418(48.5)	-0.438(48.7)
0.9	0.45	0.026	-0.495(50.2)	-0.505(50.4)
0.9	0.60	0.011	-0.566(52.0)	-0.570(52.1)
0.9	0.75	0.003	-0.632(53.8)	-0.633(53.8)
0.9	0.90	0.000	-0.693(55.5)	-0.693(55.5)

Tab.8.3.1 b - Valori critici di  $H/G$  per compressione assialsimmetrica ( $\phi$  in gradi in parentesi)

$$|T_1| = |T_2| < |T_3|$$

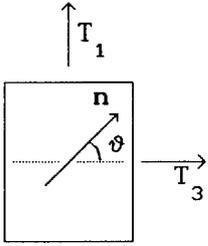


trQ	trP	Perdita di Definitezza Positiva	Perdita di Ellitticit� Forte	Perdita di Ellitticit�
-----	-----	---------------------------------	------------------------------	------------------------

$$\nu = 0.3$$

0.3	0.00	0.047	-0.250(45.5)	-0.280(45.5)
0.3	0.15	0.011	-0.332(47.6)	-0.339(47.6)
0.3	0.30	0.000	-0.393(49.8)	-0.393(49.8)
0.6	0.00	0.167	-0.207(49.0)	-0.318(49.8)
0.6	0.15	0.086	-0.346(51.3)	-0.403(52.0)
0.6	0.30	0.034	-0.460(53.8)	-0.482(54.2)
0.6	0.45	0.007	-0.550(56.4)	-0.554(56.5)
0.6	0.60	0.000	-0.621(58.9)	-0.621(58.9)
0.9	0.00	0.330	-0.118(51.4)	-0.333(54.2)
0.9	0.15	0.204	-0.316(54.0)	-0.443(56.5)
0.9	0.30	0.115	-0.480(56.9)	-0.547(58.9)
0.9	0.45	0.057	-0.615(60.1)	-0.644(61.4)
0.9	0.60	0.022	-0.726(63.4)	-0.736(64.1)
0.9	0.75	0.005	-0.820(66.7)	-0.821(66.9)
0.9	0.90	0.000	-0.901(70.1)	-0.901(70.1)

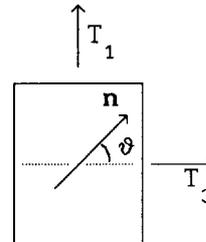
Tab. 8.3.2 a - Valori critici di  $H/G$  per trazione  
 assialsimmetrica ( $\vartheta$  in gradi in parentesi)

$|T_1| > |T_2| = |T_3|$ 


trQ	trP	Perdita di Definitezza Positiva	Perdita di Ellitticità Forte	Perdita di Ellitticità
$\nu = 0$				
0.3	0.00	0.015	-0.101(58.2)	-0.104(58.3)
0.3	0.15	0.004	-0.088(60.2)	-0.089(60.2)
0.3	0.30	0.000	-0.071(62.2)	-0.071(62.2)
0.6	0.00	0.057	-0.021(61.4)	-0.031(62.2)
0.6	0.15	0.031	-0.026(63.8)	-0.031(64.2)
0.6	0.30	0.013	-0.027(66.2)	-0.028(66.4)
0.6	0.45	0.003	-0.023(68.7)	-0.023(68.8)
0.6	0.60	0.000	-0.016(71.3)	-0.016(71.3)
0.9	0.00	0.120	0.070(64.4)	0.052(66.4)
0.9	0.15	0.080	0.047(67.2)	0.037(68.8)
0.9	0.30	0.049	0.029(70.2)	0.024(71.3)
0.9	0.45	0.026	0.016(73.5)	0.014(74.3)
0.9	0.60	0.011	0.007(77.3)	0.007(77.8)
0.9	0.75	0.003	0.002(82.6)	0.002(82.8)
0.9	0.90	0.000	-0.0005 (90)	-0.0005 (90)

Tab. 8.3.2 b - Valori critici di  $H/G$  per trazione assialsimmetrica ( $\vartheta$  in gradi in parentesi)

$$|T_1| > |T_2| = |T_3|$$



trQ	trP	Perdita di Definitezza Positiva	Perdita di Ellitticit� Forte	Perdita di Ellitticit�
$\nu = 0.3$				
0.3	0.00	0.047	-0.106(52.9)	-0.130(53.2)
0.3	0.15	0.011	-0.109(55.4)	-0.114(55.5)
0.3	0.30	0.000	-0.093(57.8)	-0.093(57.8)
0.6	0.00	0.167	0.054(56.0)	-0.018(57.8)
0.6	0.15	0.086	0.004(59.1)	-0.028(60.3)
0.6	0.30	0.034	-0.020(62.2)	-0.031(62.9)
0.6	0.45	0.008	-0.027(65.4)	-0.029(65.6)
0.6	0.60	0.000	-0.020(68.6)	-0.020(68.6)
0.9	0.00	0.330	0.239(58.3)	0.117(62.9)
0.9	0.15	0.204	0.145(61.9)	0.082(65.6)
0.9	0.30	0.115	0.082(65.9)	0.054(68.6)
0.9	0.45	0.057	0.041(70.2)	0.031(72.0)
0.9	0.60	0.022	0.017(75.1)	0.015(76.1)
0.9	0.75	0.005	0.004(81.4)	0.004(81.8)
0.9	0.90	0.000	-0.001(90.0)	-0.001(90.0)

#### 8.4 DESCRIZIONE DELLA LOCALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE NELLA PROVA DI COMPRESSIONE ASSIALSIMMETRICA CON PRESSIONE DI CONFINAMENTO

Vengono analizzate le possibilità di descrivere la localizzazione della deformazione nell'ambito della teoria della plasticità introdotta nel § 3, ristretta al caso di deformazioni e rotazioni infinitesime. Le ipotesi costitutive fondamentali sono:

- superficie di snervamento liscia,
- direzione del flusso plastico specificata da una funzione tensoriale continua delle variabili di stato,
- coassialità tra il tensore dello sforzo, il gradiente della funzione di snervamento e la direzione del flusso plastico,
- materiale isotropo.

##### Localizzazione della deformazione per prove di compressione assialsimmetrica (con pressione di confinamento)

Si analizza nel seguito il caso della compressione assialsimmetrica in presenza di pressione di confinamento nei due casi di legge di flusso associata e non. A tale scopo si assume quale sistema di riferimento quello principale di tensione in modo tale che risulti  $T_3 < T_1 = T_2 \leq 0$ . Si accettano inoltre le seguenti ipotesi costitutive:

$$P_3 < 0, \quad (4.1)$$

$$\text{tr}P \geq 0, \quad (4.2)$$

$$P \cdot Q > 0. \quad (4.3)$$

La prima di queste è di ovvio significato fisico, la seconda è imposta dalla osservazione sperimentale che la localizzazione è

accompagnata da dilatanza volumetrica e la terza implica che il flusso plastico non possa essere diretto verso l'interno della superficie di snervamento (cfr. § 3.8). Una conseguenza delle (1-3) è la validità della disuguaglianza:

$$(P_3 - P_1)(Q_3 - Q_1) > 0, \quad (4.4)$$

dalla quale si deduce che, nel caso della compressione assialsimmetrica con confinamento l'estremo (7.3.21) corrisponde ad un massimo. Si introducono, per comodità di calcolo, i tensori  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  definiti come:

$$\hat{P} = P / \sqrt{\text{tr}P^2} \quad \text{e} \quad \hat{Q} = Q / \sqrt{\text{tr}Q^2}, \quad (4.5)$$

che sono rappresentati da versori nello spazio di Haigh-Westergaard<sup>29</sup>. La componente rispetto all'asse  $T_3$  della normale alla banda di taglio, corrispondente alla localizzazione della deformazione (cfr. § 7.3), può essere posta nella forma:

$$n_3^2 = 1 - \langle 1 - \langle \chi \rangle \rangle, \quad (4.6)$$

dove:

---

<sup>29</sup> Impiegando le definizioni (5) nella formulazione delle leggi costitutive elastoplastiche, il tensore costitutivo  $\mathbb{C}$  diventa:

$$\mathbb{C} = \mathbb{E} - \frac{1}{\hat{H} + \hat{Q} \cdot \mathbb{E}[\hat{P}]} \mathbb{E}[\hat{P}] \otimes \mathbb{E}[\hat{Q}],$$

$$\text{dove } \hat{H} = H / \left[ \sqrt{\text{tr}P^2} \sqrt{\text{tr}Q^2} \right].$$

$$\begin{aligned} \chi = (1-\nu) & \frac{\hat{P}_3 \hat{Q}_3 - \hat{P}_1 \hat{Q}_1}{(\hat{P}_3 - \hat{P}_1)(\hat{Q}_3 - \hat{Q}_1)} - \frac{\hat{Q}_1}{2(\hat{Q}_3 - \hat{Q}_1)} - \frac{\hat{P}_1}{2(\hat{P}_3 - \hat{P}_1)} \\ & + \frac{\nu(\hat{Q}_3 + 2\hat{Q}_1)}{2(\hat{Q}_3 - \hat{Q}_1)} + \frac{\nu(\hat{P}_3 + 2\hat{P}_1)}{2(\hat{P}_3 - \hat{P}_1)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Il modulo di incrudimento critico corrispondente alla inclinazione (6) può essere calcolato per sostituzione nella seguente espressione:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{H}_{cr}^1}{2G} &= n_3^2 \left\{ 2(\hat{P}_3 \hat{Q}_3 - \hat{P}_1 \hat{Q}_1) - \frac{1}{1-\nu} \left[ (\hat{P}_3 - \hat{P}_1) \hat{Q}_1 + (\hat{Q}_3 - \hat{Q}_1) \hat{P}_1 \right] \right. \\ & \left. + \frac{\nu}{1-\nu} \left[ \text{tr } \hat{Q} (\hat{P}_3 - \hat{P}_1) + \text{tr } \hat{P} (\hat{Q}_3 - \hat{Q}_1) \right] \right\} - n_3^4 \frac{1}{1-\nu} (\hat{P}_3 - \hat{P}_1) \\ & (\hat{Q}_3 - \hat{Q}_1) - \hat{P}_3 \hat{Q}_3 - \hat{P}_1 \hat{Q}_1 - \frac{\nu}{1-\nu} (\hat{Q}_3 + \hat{Q}_1) (\hat{P}_3 + \hat{P}_1), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{dove } \hat{H}_{cr}^1 = H_{cr}^1 / \left[ \sqrt{\text{tr} \mathbf{P}^2} \sqrt{\text{tr} \mathbf{Q}^2} \right].$$

- Legge di flusso associata

La localizzazione è esclusa in presenza di incrudimento positivo. La localizzazione, nella prova di compressione assialsimmetrica con confinamento, avviene in corrispondenza del picco della curva tensione-deformazione solo se  $\hat{Q}_1 = 0$ . Infatti la localizzazione è possibile per  $\hat{H} = 0$  solo se l'estremo analitico (7.5.3) è ammissibile e, in tal caso, dalla (7.5.3) si deduce:

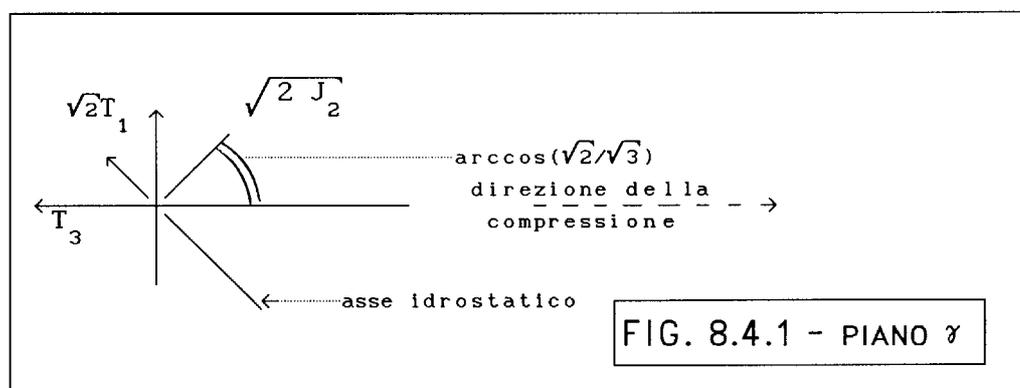
$$\hat{H}_{cr}^1 = -G(1 + \nu) \hat{Q}_1^2 = 0 \Rightarrow \hat{Q}_1 = 0, \quad (4.9)$$

che corrisponde ad una banda ortogonale alla direzione della compressione.

Quindi, nell'ambito dei legami costitutivi elastoplastici con legge di flusso associata, non è possibile interpretare correttamente il comportamento dei materiali a matrice cementizia, nella prova di compressione semplice. Infatti i risultati sperimentali mostrano che la localizzazione avviene per valori positivi del modulo di incrudimento e per inclinazioni della banda rispetto all'asse di compressione minori di circa  $40^\circ$ .

#### - Legge di flusso non associata

In Fig. 8.4.1 è riportato il piano individuato, nello spazio di Haigh-Westergaard, dall'asse  $T_3$  e dall'asse idrostatico. Tale piano verrà indicato nel seguito come piano  $\gamma$ . Sul piano  $\gamma$  la traccia del piano  $\pi$  (cfr. § 3.4) individua una retta inclinata di un angolo pari ad  $\arccos(\sqrt{2}/\sqrt{3})$  rispetto all'asse  $T_3$ . Nel piano  $\gamma$  giacciono, per la prova monoassiale, i tensori  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$ .

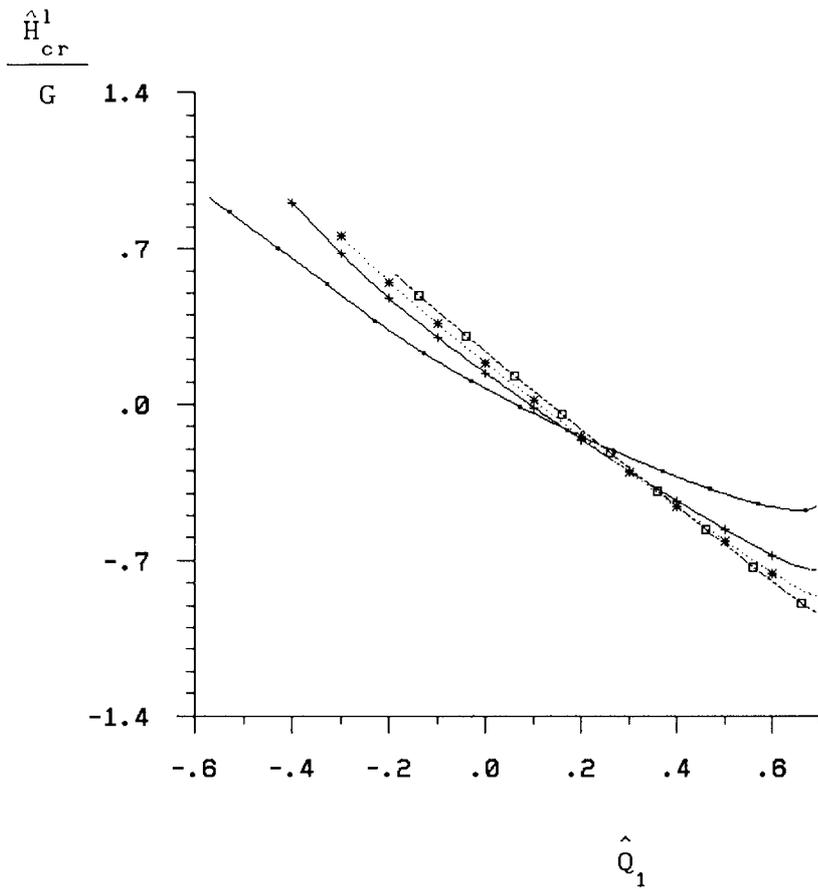


Essendo nella prova di compressione assialsimmetrica  $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$  e  $\hat{Q}_1 = \hat{Q}_2$ , assegnate le componenti  $\hat{P}_1$  e  $\hat{Q}_1$ , i tensori  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  risultano completamente individuati. Risulta quindi possibile ricavare dalla (5) e dalla (7) la inclinazione della banda ed il modulo di incrudimento critico corrispondente (normalizzato rispetto a G) in corrispondenza di ogni coppia  $\hat{P}_1$  e  $\hat{Q}_1$  e per ogni valore del coefficiente di Poisson. E' immediato verificare, ad esempio, che per  $\hat{Q}_1 = 0$  (ovvero  $\hat{Q}_3 = -1$ ) il modulo di incrudimento critico per la localizzazione e' positivo.

Quindi nell' ambito di un legame costitutivo elastoplastico con legge di flusso non associata e' possibile interpretare la localizzazione della deformazione dei materiali a matrice cementizia nella prova di compressione monoassiale.

Nella Fig. 8.4.2 (a) è rappresentato il modulo di incrudimento critico per la localizzazione (normalizzato a G) in funzione di  $\hat{Q}_1$ , per diversi valori di  $\hat{P}_3$  e per  $\nu = 0$ . Nella Fig. 8.4.2 (b) è riportato, in funzione degli stessi parametri, l' inclinazione (in gradi) della normale alla banda rispetto all' asse della compressione. Gli stessi andamenti sono riportati nelle Figg. 8.4.3 (a) e (b) per  $\nu = 0.15$ <sup>30</sup>. Nelle Figg. 8.4.4 (a) e (b) e 8.4.5 (a) e (b) il valore di  $\hat{P}_3$  è tenuto costante (pari a  $-\sqrt{2}/\sqrt{3}$  e  $-0.3$ , rispettivamente) e viene riportato l' andamento di  $\hat{H}_{cr}^1/G$  in funzione di  $\hat{Q}_1$  per diversi valori di  $\nu$ . A  $\hat{P}_3 = -0.3$  corrisponde  $\text{trP} = 0.9$ , che rappresenta una dilatazione per deformazione plastica sicuramente superiore rispetto ai valori che si riscontrano sperimentalmente (cfr. Rudnicki e Rice 1975). Il valore  $\hat{P}_3 = -0.3$  rappresenta pertanto un limite superiore.

<sup>30</sup> Per completezza, nella Appendice 2 sono riportati gli stessi andamenti per  $\nu = 0.30$  e  $\nu = 0.45$ .



- $\hat{P}_3 = -0.8164$
- \*  $\hat{P}_3 = -0.45$
- +  $\hat{P}_3 = -0.60$
- □  $\hat{P}_3 = -0.30$

$\hat{H}_{cr}^1$  = modulo di incrudimento  
critico per la  
localizzazione

$n$  = normale alla banda

$\nu = 0$

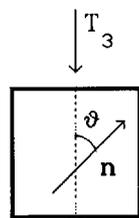
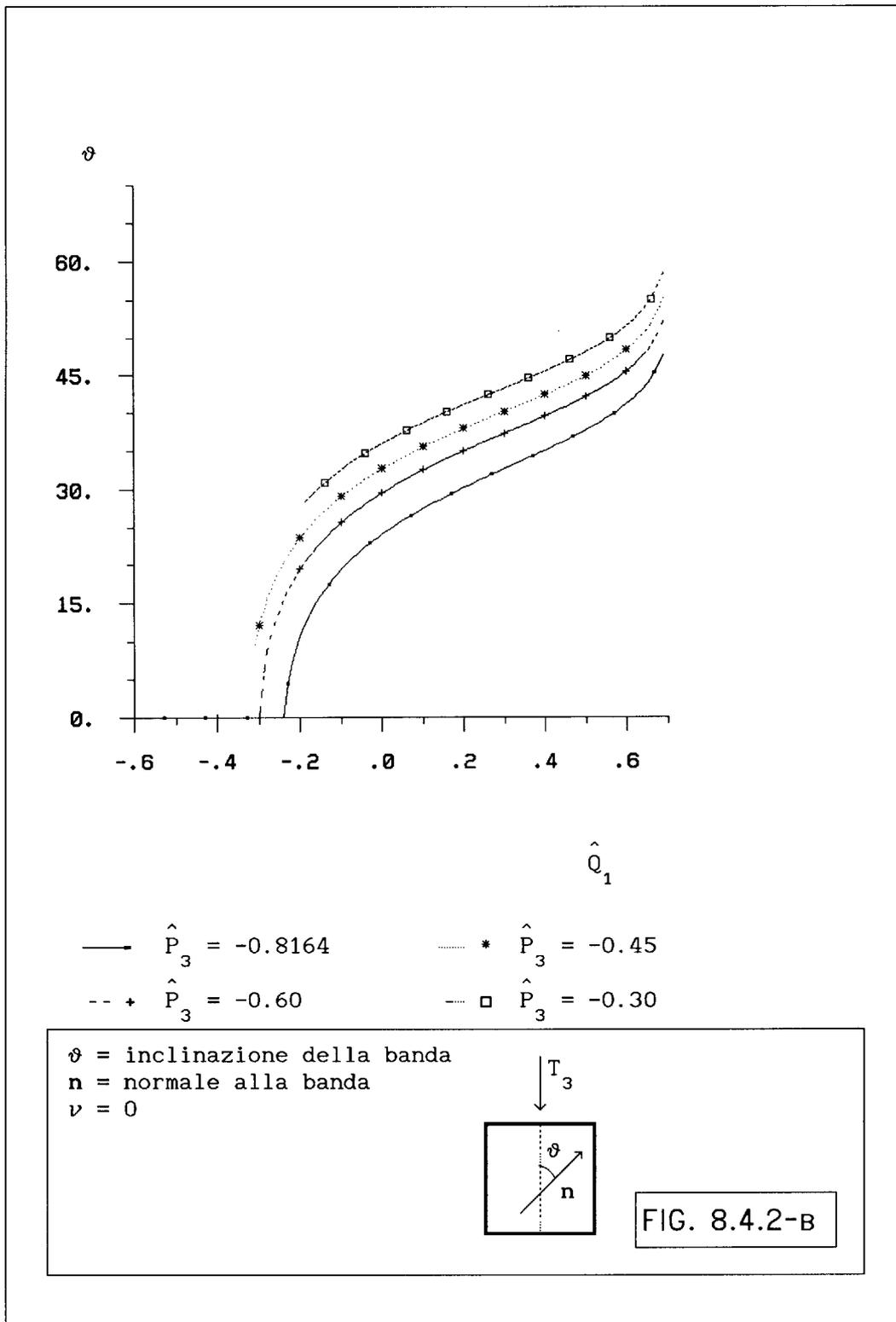
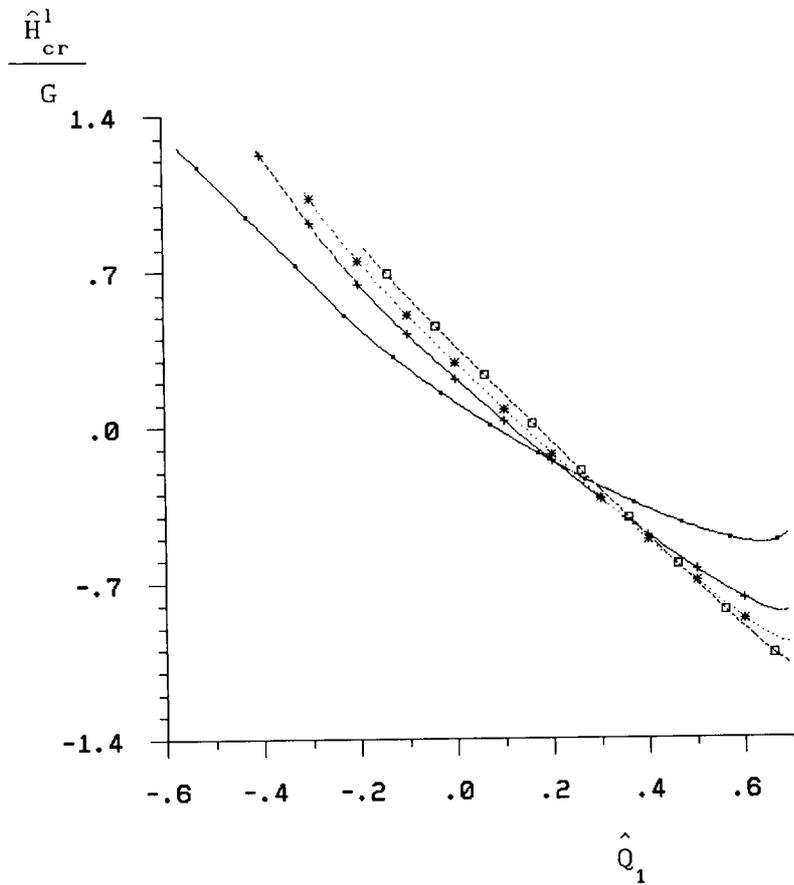


FIG. 8.4.2-A





- $\hat{P}_3 = -0.8164$
- - \*  $\hat{P}_3 = -0.45$
- - +  $\hat{P}_3 = -0.60$
- - □  $\hat{P}_3 = -0.30$

$\hat{H}_{cr}^1$  = modulo di incrudimento  
critico per la  
localizzazione

$\mathbf{n}$  = normale alla banda

$\nu = 0.15$

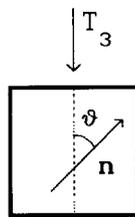
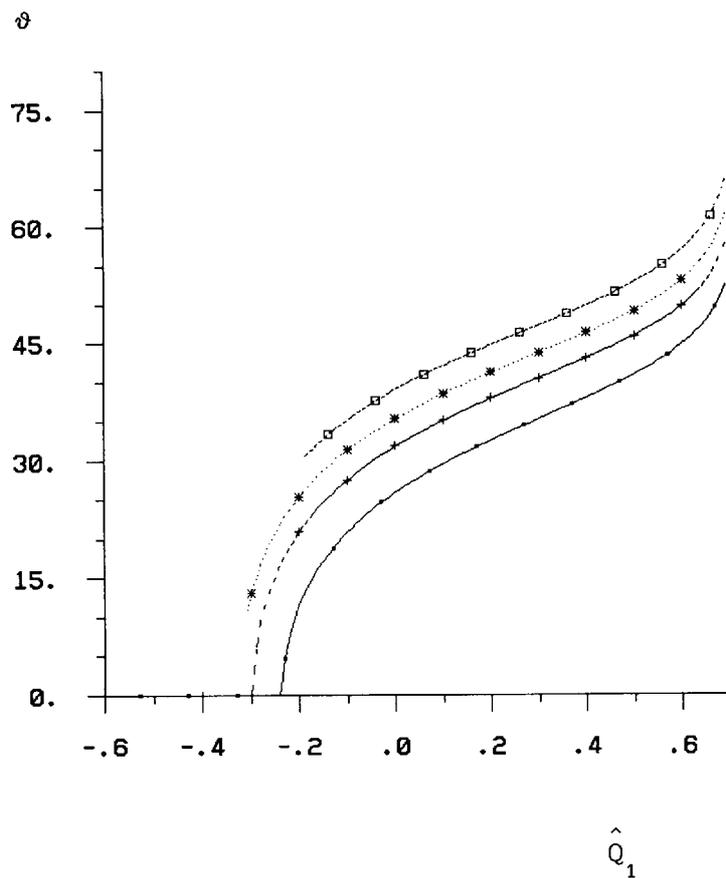


FIG. 8.4.3-A



$\varphi$  = inclinazione della banda  
 $\mathbf{n}$  = normale alla banda  
 $\nu = 0.15$

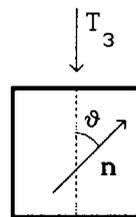
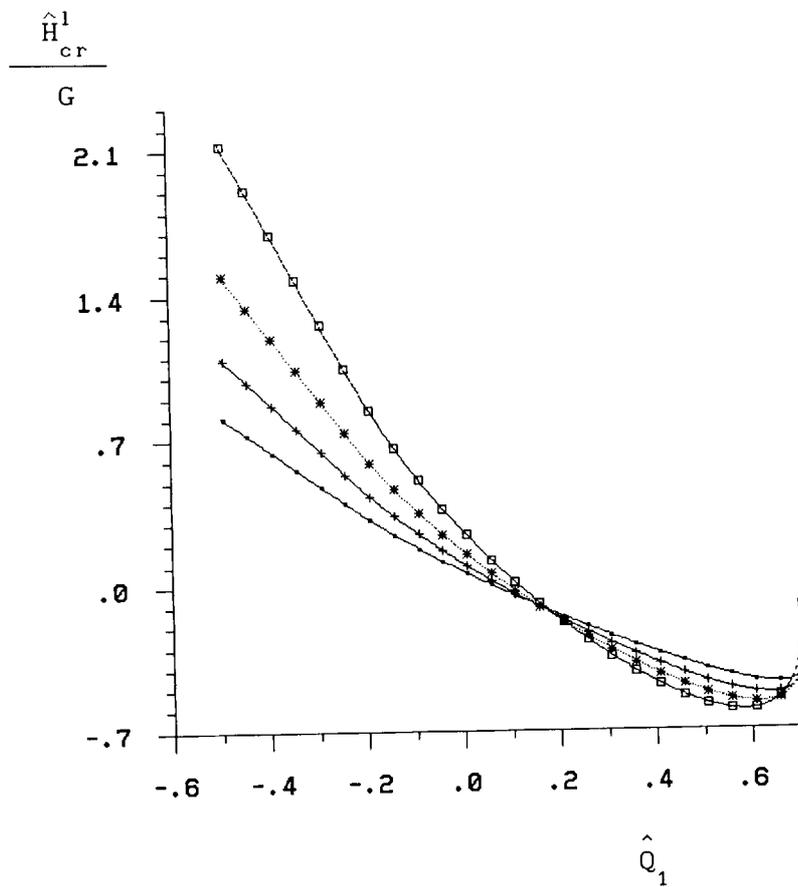


FIG. 8.4.3-B



—•—  $\nu = 0$                       ..... \*  $\nu = 0.30$   
 - - +  $\nu = 0.15$                   - · - □  $\nu = 0.45$

$\hat{H}_{cr}^1$  = modulo di incrudimento  
 critico per la  
 localizzazione

$\mathbf{n}$  = normale alla banda

$\hat{P}_3 = -0.8164, \text{tr}\hat{P} = 0$

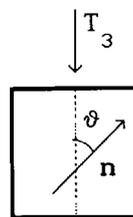
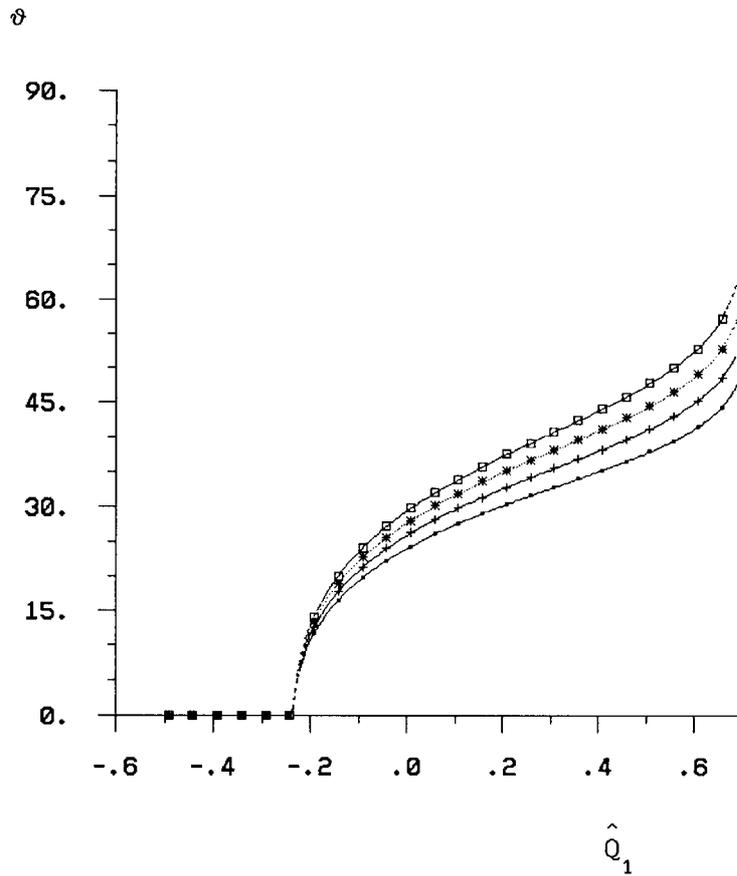


FIG. 8.4.4-A



—•—  $\nu = 0$                       - - \*  $\nu = 0.30$   
 - - +  $\nu = 0.15$                     - - □  $\nu = 0.45$

$\vartheta$  = inclinazione della banda

$\mathbf{n}$  = normale alla banda

$\hat{P}_3 = -0.8164, \text{tr}\hat{P} = 0$

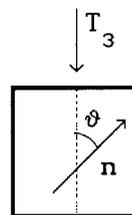
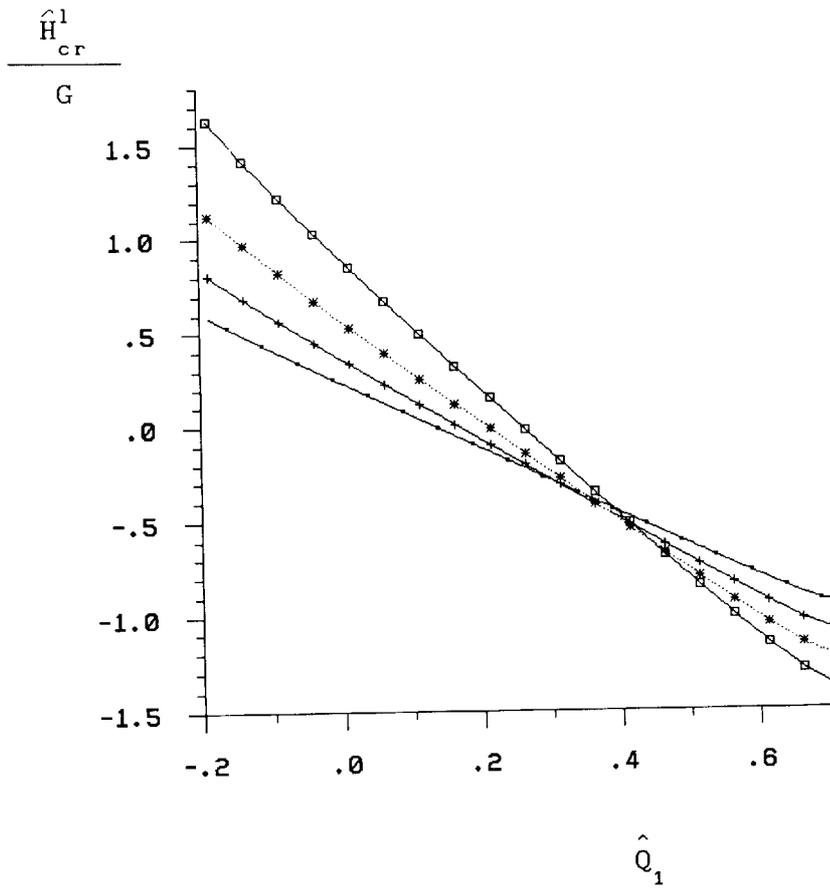


FIG. 8.4.4-B



—  $\nu = 0$                       ···· \*  $\nu = 0.30$   
 - - +  $\nu = 0.15$                 - · - □  $\nu = 0.45$

$\hat{H}_{cr}^1$  = modulo di incrudimento  
 critico per la  
 localizzazione

$n$  = inclinazione della banda

$\hat{P}_3 = -0.3, \text{tr}\hat{P} = 1.0491$

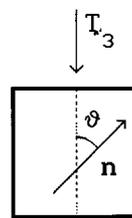
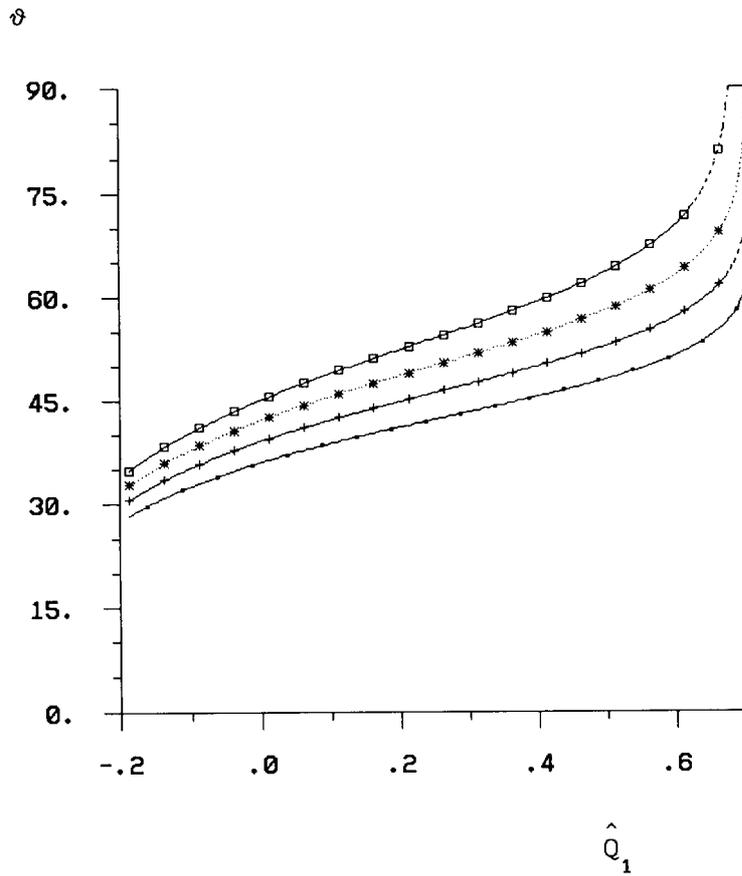


FIG. 8.4.5-A



—  $\nu = 0$                       \*  $\nu = 0.30$   
 - - +  $\nu = 0.15$                 - · -  $\nu = 0.45$

$\phi$  = inclinazione della banda  
 $\mathbf{n}$  = normale alla banda  
 $\hat{P}_3 = -0.3, \text{tr}\hat{P} = 1.0491$

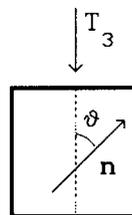


FIG. 8.4.5-B

In sintesi, da un esame delle figure riportate e basandosi sulla trattazione svolta, si possono trarre le seguenti osservazioni:

- Il modulo di incrudimento critico per la localizzazione è *positivo* per valori di  $\hat{Q}_1$  inferiori a circa 0.3, corrispondenti a valori di  $\hat{Q}_3$  inferiori a circa -0.9. Poichè un versore sulla retta intersezione del piano  $\pi$  con il piano  $\gamma$  ha componente sull' asse  $T_3$  pari a  $-\sqrt{2}/\sqrt{3} \cong -0.82 > -0.9$ , ne discende che, per risultare  $\hat{Q}_3 < -0.9$ , la superficie di snervamento, se convessa, deve intersecare l' asse ottaedrico.
- Il modulo di incrudimento critico, quando è positivo, cresce al crescere di  $\nu$  e al crescere di  $\hat{P}_3$  (ovvero all' aumentare del "grado di non-associatività").
- Sono possibili i casi di sviluppo di bande sia ortogonali che *parallele*<sup>31</sup> alla direzione della compressione.

---

<sup>31</sup> Il caso di bande parallele alla direzione della compressione si verifica in presenza di parametri costitutivi inusuali. Si può notare infatti dalla Fig. 8.4.5 (b) che la possibilità di bande parallele alla direzione dello sforzo implica che la tangente alla superficie di snervamento nel punto intersezione con l' asse  $T_3$  sia quasi parallela all' asse  $T_3$  stesso. Un esempio notevole è fornito dal criterio di Mohr-Coulomb nel caso di attrito interno pari a  $\pi/2$  e coesione nulla. Infatti, il criterio di Mohr-Coulomb può essere messo nella forma (cfr. Chen e Han 1988, pp.88-99):

$$f(\zeta, \rho, \vartheta) = \sqrt{2} \zeta \sin\phi + \sqrt{3} \rho \sin(\vartheta + \frac{\pi}{3}) + \rho \cos(\vartheta + \frac{\pi}{3}) \sin\phi - c \cos\phi,$$

valida per  $0 \leq \vartheta \leq \pi/3$ , ove gli invarianti  $\zeta$ ,  $\rho$  e  $\vartheta$  sono stati definiti nel § 3.4,  $C$  rappresenta la coesione e  $\phi$  l' angolo di attrito interno, legati alla resistenza monoassiale a trazione  $f_t$  e a compressione  $f_c$  dalle espressioni:

$$f_t = \frac{2c \cos\phi}{1 + \sin\phi}, \quad f_c = \frac{2c \cos\phi}{1 - \sin\phi}.$$

- A valori di  $\hat{Q}_1$  negativi corrispondono moduli di incrudimento critici crescenti ed angoli tra la normale alla banda e l'asse della compressione che diminuiscono al diminuire di  $\hat{Q}_1$ .

Si può quindi affermare che, per interpretare il fenomeno della localizzazione della deformazione nei materiali a matrice cementizia, è necessario che il modello elastoplastico soddisfi le seguenti caratteristiche:

- *Le superfici di snervamento, se convesse, devono necessariamente intersecare l'asse ottaedrico in compressione.*

Tale caratteristica è peraltro in accordo, qualitativamente, con i risultati sperimentali in prove di compressione idrostatica

La intersezione della superficie di snervamento di Mohr - Coulomb con un qualunque piano meridiano è rappresentata da due rette inclinate dello stesso angolo  $\alpha$  rispetto all'asse ottaedrico. L'angolo  $\alpha$  resta determinato dalla relazione:

$$\tan \alpha(\vartheta) = \frac{\rho_o}{\zeta_o} = \frac{\sqrt{2} \sin \phi}{\sqrt{3} \sin(\vartheta + \frac{\pi}{3}) + \sin \phi \cos(\vartheta + \frac{\pi}{3})},$$

dove  $\rho_o$  e  $\zeta_o$  vengono determinate imponendo rispettivamente  $f(0, \rho_o, \vartheta) = 0$  e  $f(\zeta_o, 0, \vartheta) = 0$ . Dall'ultima relazione si deduce che per  $\phi = \pi/2$  e  $0 \leq \vartheta \leq \pi/3$  risulta  $1/\sqrt{2} \leq \tan \alpha \leq \sqrt{2}$ . Nel caso della compressione semplice risulta  $\vartheta = \pi/3$  e quindi la superficie di Mohr-Coulomb interseca il piano  $\gamma$ , nel caso sia  $\phi = \pi/2$ , secondo una retta parallela all'asse  $T_3$ . Tale retta si identifica con l'asse  $T_3$  qualora sia nulla la coesione. Quindi, adottando il criterio di Mohr-Coulomb, per  $\phi = \pi/2$  e  $c=0$ , risulta  $\hat{Q}_3 = 0$ , e sono possibili bande di taglio parallele alla direzione della compressione, quando risulta verificata la disuguaglianza:

$$(1-\nu) \hat{P}_3 + 2\nu \hat{P}_1 \geq 0,$$

ottenuta dalla (7) imponendo la condizione parallelismo della banda alla direzione di carico, ovvero imponendo  $\chi \leq 0$ .

(cfr. § 8.2). Superfici di questo tipo sono state proposte da Roscoe e Burland (1968) (cfr. § 3.10) e da Chen e Collaboratori (cfr. Chen e Han 1988, § 7).

- *La normale alla superficie di snervamento deve essere prossima<sup>32</sup> all' asse  $T_3$ .*

Questa condizione non risulta essere verificata<sup>33</sup> per la superficie di snervamento proposta da Chen e Collaboratori e, se si accetta che la tensione di snervamento per stati di trazione idrostatica sia inferiore alla compressione idrostatica di snervamento, neppure per quella di Roscoe e Burland (1968).

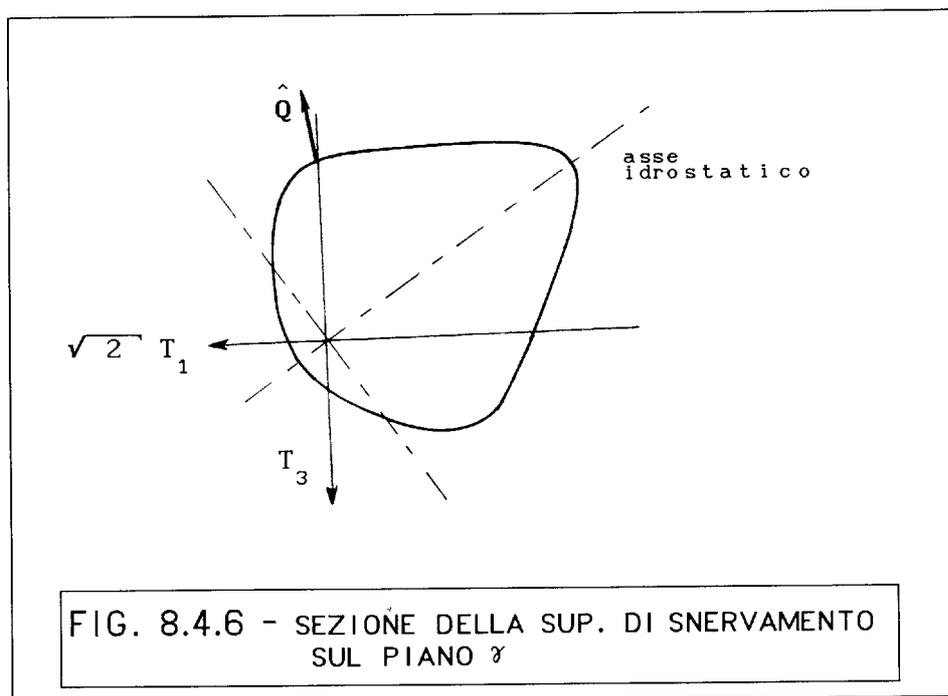
- *Il fatto che vengano rilevate sperimentalmente bande con inclinazioni rispetto all' asse della compressione inferiori a circa  $40^\circ$ , conduce all' esclusione dei valori negativi di  $\hat{Q}_1$  (nel quale caso le inclinazioni risultano superiori a circa  $45^\circ$ ).*

- *La superficie di snervamento, se convessa, deve avere, all' atto della localizzazione una sezione sul piano  $\gamma$  qualitativamente simile a quella rappresentata in Fig. 8.4.6.. Si noti che, nella figura si è ipotizzata, per semplicità, la simmetria attorno all' asse idrostatico.*

---

<sup>32</sup>La componente  $\hat{Q}_3$  deve risultare inferiore a circa -0.9.

<sup>33</sup>Da un esame qualitativo della forma delle superfici riportate in Chen ed Han (1988, § 7).



#### - Conclusioni

In sintesi, si può concludere che il modello elastoplastico incrementale descritto nel § 3, tramite una opportuna scelta della forma della superficie di snervamento e della legge di flusso plastico, risulta in grado di descrivere la localizzazione della deformazione nel ramo di incrudimento positivo per prove di compressione assialsimmetrica. Al contrario, tale fenomeno non è descrivibile nè dal modello proposto da Rudnicki e Rice (1975), nè dal modello di Ortiz (1987) e neppure da quello (elastoplastico-fratturante) impiegato da Bigoni e Hueckel (1991 b). È stato mostrato inoltre che la legge di flusso plastico associata non consente di interpretare i risultati del LCPC. I soli risultati delle prove di compressione assialsimmetrica con pressione di confinamento nulla non risultano peraltro sufficienti per la formulazione di un modello completo (i.e. che copra un insieme sufficientemente ampio di percorsi tensionali).

## BIBLIOGRAFIA

- Abeyaratne, R. e Triantafyllidis, N. (1981). *The emergence of shear bands in plane strain*. Int. J. Solids Structures, **17**(12) 1113-1134.
- An, L. e Schaeffer, D. (1990). *The flutter instability in granular flow*, submitted.
- Asaro, R. J. (1985). *Material modelling and failure modes in metal plasticity*. Mech. Materials, **4**, 343-373.
- Baker, R. e Desai, C.S. (1982). *Consequences of deviatoric normality in plasticity with isotropic strain hardening*. Int. J. Num. Meth. Geomech., **6**, 383-390.
- Baker, R. e Desai, C.S. (1984). *Induced anisotropy during plastic straining*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics, **8**, 167-185.
- Batra, R.C. e Liu, D. (1989). *Adiabatic shear banding in plane strain problems*. J. Appl. Mech. **56**, 527-534.
- Bazant, Z.P. (1986). *Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete*. J. Eng. Mech. Div. ASCE, **102**(EM2), 331-334.
- Bazant, Z.P. (1988). *Softening instability: Part I and Part II*, J. Appl. Mech. **55**, 517-529.
- Bazant, Z.P. e Mazars, J. (1990). *France-U.S. Workshop on Strain Localization and Size Effect due to Cracking and Damage*. J. Eng. Mech. ASCE, **116**(6), 1412-1424.
- Belytschko, T., Fish, J. e Engelmann, B.E. (1988). *A finite element with embedded localization zones*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., **70**, 59-89.
- Belytschko, T. e Lasry, D. (1989). *A study of localization limiters for strain-softening in statics and dynamics*. Comp. Struct., **33**(3), 707-715.
- Benaija, E.H. (1991). *Localization of deformation in concrete*. Ecole National des Ponts et Chaussees, Paris, Ph. D. Thesis (in preparazione).
- Benallal, A., Billardon, R. e Geymonat, G. (1989). *Some mathematical aspects of the damage softening rate problem*, in Cracking and Damage, Mazars, J. e Bazant, Z.P., Eds., Elsevier, London 247-258.
- Benallal, A., Billardon, R. e Geymonat, G. (1990). *Phenomenes de localisation a la frontiere d' un solide*. C.R. Acad. Sci. Paris, **t 310**, Serie II, 679-684.

- Bigoni, D. e Hueckel, T. (1989 a) *Loss of uniqueness and shear band in associative and non-associative plasticity*. Presented at the 2nd International Workshop on "Numerical Methods for Localization and Bifurcation of Granular Bodies", Danzica, settembre 1989 (non pubblicato).
- Bigoni, D. e Hueckel, T. (1989 b) *On necessary and sufficient criteria for uniqueness in elastoplasticity for unconstrained and constrained kinematics*. Meccanica dei materiali e delle strutture, Convegno in ricordo di R. Baldacci e M. Capurso, Roma.
- Bigoni, D. e Hueckel, T. (1990 a). *On uniqueness and strain localization in plane strain and in plane stress elastoplasticity*. Mech. Res. Comm., 17(1), 15-23 e 17(3), 189.
- Bigoni, D. e Hueckel, T. (1990 b). *A note on strain localization for a class of non-associative plasticity rules*. Ingenieur Archiv, 60, 491-499.
- Bigoni, D. e Hueckel, T. (1991 a). *Uniqueness and localization. Part. I - Associative and non-associative elastoplasticity*. Int. J. Solids Structures, in printing.
- Bigoni, D. e Hueckel, T. (1991 b). *Uniqueness and localization. Part. II - Coupled elastoplasticity*. Int. J. Solids Structures, in printing.
- Bigoni D. e Laudiero F. (1989). *The quasi-static finite cavity expansion in a non-standard elastoplastic medium*. Int. J. Mech. Sci., 31, 825-837.
- Bigoni D. e Zaccaria D. (1990). *Condizioni integrali e puntuali di stabilita' per solidi elastoplastici non-standard*. X Congresso Naz. AIMETA, Pisa.
- Bigoni, D. e Zaccaria, D. (1991). *Material stability in nonassociative elastoplasticity*. To appear.
- Borrè, G. e Maier, G. (1989) *On linear versus nonlinear flow rules in strain localization analysis*. Meccanica, 24(1), 36-41.
- Bresler, B. e Pister, K.S. (1958). *Strength of concrete under combined stresses*. J. American Concrete Inst., 30, 321-345.
- Capurso, M. (1979). *Extremum theorems for the solution of the rate problem in elastic-plastic fracturing structures*. J. Struct. Mech., 7(4), 411-434.
- Carpinteri, Al. (1985). *Interpretation of the Griffith instability as a bifurcation of the global equilibrium, Application of fracture mechanics to cementitious composites*, Shah, S.P. Ed., Nijhoff Pub., 287-316.
- Carpinteri, Al. (1986). *Size effects on the brittleness of concrete structures*. Il Cemento, 83, 375-388.

- Carpinteri, Al. (1989). *Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size: two different explanations based on fracture mechanics*. Int. J. Solids Struct., **25**(4), 407-429.
- Carpinteri, Al., Di Tommaso, A. e Fanelli, M. (1986). *Influence of materials parameters and geometry on cohesive crack propagation*. in Fracture toughness and fracture energy of concrete, Ed. Wittmann, F.H., Elsevier, Amsterdam, 117-135.
- Casey, J. e Lin, H.H. (1986). *Subcritical, critical and supercritical direction of loading in plasticity*. J. de Mec. Theor. et Appl., **5**(5), 685-701.
- Cattaneo, C. (1946). *Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità*. Atti Accademia Naz. Lincei I, nota I e II, 66-72 e 728-734.
- Chadwick, P. (1976). *Continuum mechanics*. Wiley & Sons, Chichester.
- Chadwick, P. e Powdrill, B. (1965). *Singular surfaces in linear thermoelasticity*. Int. J. Engrg. Sci., **3**, 561-595.
- Chambon, R. (1986). *Bifurcation par localisation en bande de cisaillement, une approche avec des lois incrementalment non lineaires*. J. J. de Mec. Theor. et Appl., **5**(2), 277-298.
- Chen, W.F. (1979). *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevier.
- Chen, W. F. (1982). *Plasticity in reinforced concrete*. Mc-Graw Hill, New York.
- Chen, A.C.T. e Chen, W. F. (1975). *Constitutive relations for concrete*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, **101**(EM4), 465-481.
- Chen, W.F. e Han, D.J. (1988). *Plasticity for structural engineers*, Springer-Verlag, Berlin.
- Cleary, M.P. (1976). *Continuously distributed dislocation model for shear-bands in softening materials*. Int. J. Num. Meth. Engng., **10**, 679-702.
- Cleary, M.P. e Rudnicki, J.W. (1976). *The initiation and propagation of dilatant rupture zones in geological materials*, in The effect of Voids on Material Deformation, Cowin, S.C., Ed., Applied Mechanics Division, **16**, ASME.
- Cundall, P.A. (1989). *Numerical experiments on localization in frictional materials*. Ingenieur-Archiv, **59**, 148-159.
- Dafalias, Y.F. (1977). *Elasto-plastic coupling within a thermodynamic strain space formulation of elastoplasticity*. Int. J. Non-linear Mech., **12**, 327-337.
- Dafalias, Y.F. e Hermann, L.R. (1982). *Bounding surface formulation of soil plasticity*, in Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, Pande, G.N. e Zienkiewicz, O.C., Eds. Wiley & Sons, Chichester, 253-282.

- Darve, F. (1984). *An incrementally non-linear constitutive law of second order and its application to localization*, in Mechanics of Engrg. Materials, Desai, C.S. e Gallagher, R.H., Eds., Wiley & Sons, Chichester.
- Darve, F. (1990 a). *The expression of rheological laws in incremental form and the main classes on constitutive equations*. in Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling, Darve, F., Ed., Elsevier, Amsterdam, 123-147.
- Darve, F. (1990 b). *Incrementally non-linear constitutive relationships*. in Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling, Darve, F., Ed., Elsevier, Amsterdam, 213-237.
- de Borst, R. (1986). *Numerical simulation of shear-band bifurcation in sand bodies*, in 2nd International Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Ghent, 91-98.
- de Borst, R. (1989). *Numerical methods for bifurcation analysis in geomechanics*. Ingenieur-Archiv, **59**, 160-174.
- de Josselin de Jong, G. (1964). *Lower bound collapse theorem and lack of normality of strain rate to yield surface for soils*, Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mech., Grenoble, 69-78.
- Derski, W., Izbicki, R., Kisiel, I. e Mróz, Z. (1989). *Rock and soil mechanics*. Elsevier, Amsterdam.
- Desrues, J. (1983). *Sur l' application de la stereophotogrammetrie a la mesure des grandes deformations*. Revue Francaise de Mecanique, **3**, 55-63.
- Desrues, J. (1990). *Shear band initiation in granular materials: experimentation and theory*. in Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling, Darve, F., Ed., Elsevier, Amsterdam.
- Desrues, J. e Hammad, W. (1989). *Shear banding dependency on mean pressure level in sand*, presented at the 2nd Int. Workshop on Numerical Methods for Localization and Bifurcation of Granular Bodies, Gdansk, sept. 1989.
- Desrues, J., Lanier, J. e Stutz, P. (1985). *Localization of deformation in tests on sand sample*. Engrg. Fract. Mech., **21**(4), 909-921.
- Di Tommaso, A. (1984). *Evaluation of concrete failure*, in Fracture Mech. in Concrete: Material charact. testing, Carpinteri, Al. e Ingrassia, A.R. Eds., Martinus Nijhoff Pub.
- Di Tommaso, A. e Di Leo, A. (1987). *Mechanics, technology and quality control of concrete to-day*. in Tecnologia, scienza e storia per la conservazione del costruito, Dip. di Costruzioni, Università di Firenze.
- Di Tommaso, A., Pascale, G. e Cianfrone, F. (1989). *Experimental microseismic evaluation of artificially induced defects on stonework*, in Fracture of concrete and rock, Eds Shah, S.P., Swartz, S.E. e Barr, B., Elsevier, London, 265-277.

- Dougill, S.W. (1976). *On stable progressively fracturing solids*. Z. Angew. Math. Phys., **27**, 423-437.
- Drescher, A. e Vardoulakis, I. (1988). *Testing localized deformations in clays*. Technical Report to ISMES.
- Drucker, D.C. (1951). *A more fundamental approach to stress-strain relations*. Proc. 1st. U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. American Society of Mechanical Engineers, pp. 487-491.
- Drucker, D.C. (1953). *Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems*. J. Mech. Phys. Solids, **1**, 217-226.
- Drucker, D.C. (1954). *Coulomb friction plasticity and limit loads*. J. Appl. Mech. ASME, **76**, 71-74.
- Drucker, D.C., Gibson, R.E. e Henkel, D.J. (1957). *Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity*. Trans. ASCE, **122**, 338-346.
- Drucker, D.C. e Prager, W. (1952). *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*. Quart. Appl. Math., **10**, 157-165.
- Duszek, M. e Perzyna, P. (1988 a). *Plasticity of damaged solids and shear band localization*. Ingenieur-Archiv, **58**, 380-392.
- Duszek, M. e Perzyna, P. (1988 b). *Influence of of the kinematic hardening of the plastic flow localization in damaged solids*. Arch. Mechanics, **40**, 595-609.
- Duszek, M. e Perzyna, P. (1989). *On combined isotropic and kinematic hardening effects in plastic flow processes*. Int. J. Plasticity, in print.
- Ekeland, I. e Temam, R. (1976). *Convex analysis and variational problems*, North-Holland, Amsterdam.
- Fardshisheh, F. e Onat, E.T. (1972). *Representation of elastoplastic behavior by means of state variables*, in Problems of Plasticity, Sawczuk, A., Ed., Noordhoff, Leyden, 1974, 89-115.
- Finzi, B. e Pastori, M. (1961). *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna.
- Finno, R.J. (1989). *Field measurements of strain localization in soft clay*, in Cracking and Damage, Mazars, J. e Bazant, Z.P., Eds., Elsevier, London 42-54.
- Fish, J. e Belytschko, T. (1990). *A finite element with a unidirectionally enriched strain field for localization analysis*. Computer Meth. Appl. Mech. Engrg. **78**, 181-200.
- Geiringer, H. (1973). *Ideal plasticity*, in Handbuch der Physik, Flügge, S., Ed., **VI a/3**, Springer-Verlag, Berlin.
- Gurtin, M.E. (1972). *The linear theory of elasticity*. in "Encyclopedia of Physics", **VIa/2** (Ed. Flügge), Springer-Verlag, Berlin.

- Gurtin, M.E. (1981). *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press, New York.
- Hadamard, J. (1903). *Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l' Hydrodynamique*, Hermann, Paris.
- Halphen, B. (1978). *Sur les discontinuites de vitesse en elastoplasticite*. C. R. Acad. Sc. Paris, A, t.287, 569-572.
- Han, D.J. e Chen, W.F. (1986). *Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling*. Int. J. Solids Structures, 22(8), 935-950.
- Han, D.J. e Chen, W.F. (1987). *Constitutive modeling in analysis of concrete structures*. J. Eng. Mech., 113(4), 577-593.
- Hardy, M.P., Hudson, J.A. e Fairhurst, C. (1973). *The failure of rock beams, part. I and II*, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 10, 56-67 e 69-82.
- Haythornthwaite, R.M. (1960). *Mechanics of the triaxial tests for soils*. J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, 86(SM5), 35.
- Hill, R. (1948). *A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity*. Q. J. Mech. Appl. Math., 1, 18-28.
- Hill, R. (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press, Oxford.
- Hill, R. (1952). *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*. J. Mech. Phys. Solids, 1, 19-30.
- Hill, R. (1957). *On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strains*. J. Mech. Phys. Solids, 5, 229-241.
- Hill, R. (1958). *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*. J. Mech. Phys. Solids, 6, 236-249.
- Hill, R. (1959). *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*. J. Mech. Phys. Solids, 7, 209-225.
- Hill, R. (1961). *Uniqueness in general boundary value problems for elastic and inelastic solids*, J. Mech. Phys. Solids, 9, 114-130.
- Hill, R. (1962). *Acceleration waves in solids*. J. Mech. Phys. Solids, 10, 1-16.
- Hill, R. (1968). *On constitutive inequalities for simple materials -II*. J. Mech. Phys. Solids, 16, 315-322.
- Hill, R. (1979). *On the theory of plane strain in finitely deformed compressible materials*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 86, 161-178.
- Hill, R. e Hutchinson, J. W. (1975). *Bifurcation phenomena in plane tension test*. J. Mech. Phys. Solids, 23, 239-264.

- Hill, R., Lee, E.H. e Tupper, S.J. (1947). *The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure*. Proc. R. Soc., **A188**, 278.
- Hillerborg, A. (1984). *Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete*. Fracture Mech. of Concrete: Structural appl. and num. calculation, Sih, G.C. e Di Tommaso, A. Eds. Nijhoff Pub., 141.
- Hueckel, T. (1975). *On plastic flow of granular and rock-like materials with variable elasticity moduli*. Bull. Pol. Acad. Sci., Ser. Techn., **23**(8), 405-414.
- Hueckel, T. (1976). *Coupling of elastic and plastic deformation of bulk solids*. Meccanica, **11**, 227-235.
- Hueckel, T. e Maier, G. (1977). *Incremental boundary value problems in the presence of coupling of elastic and plastic deformations: a rock mechanics oriented theory*. Int. J. Solids Structures. **13**, 1-15.
- Hutchinson, J. W. (1973). *Finite strain analysis of elastic-plastic solids and structures*, in Numerical solutions of nonlinear structural problems, Hartung, R.F. Ed., ASME, New York, 17-29.
- Hutchinson, J. W. e Tvergaard V. (1980). *Shear band formation in plane strain*. Int. J. Solids Structures, **17**, 451-470.
- Ichikawa, Y., Ito, T. e Mróz, Z. (1990). *A strain localization condition applying multi-response theory*. Ingenieur-Archiv, in print.
- Iwakuma, T. e Nemat-Nasser, S. (1982). *An analytical estimate of shear band initiation in a necked bar*. Int. J. Solids Struct., **18**(1), 69-83.
- Kachanov, L.M. (1971). *Foundations of the theory of plasticity*, North-Holland, Amsterdam.
- Kleiber, M. (1986). *On plastic localization and failure in plane strain and round void containing tensile bars*. Int. J. Plasticity, **2**, 205-221.
- Knowles, J. K. e Sternberg, E. (1976). *On the failure of ellipticity of the equations for finite elastostatic plane strain*. Arch. Rat. Mech. Anal., **63**, 321-336.
- Knowles, J. K. e Sternberg, E. (1978). *On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics*. J. Elasticity, **8**(4), 329-379.
- Koiter, W.T. (1953). *On partially plastic thick-walled tubes*, Bizen Anniversary Vol. in Appl. Mech., N.V. De Technische Uitgeverij H. Stam, Haarlem, 232-251.

- Koiter, W.T. (1960). *General theorems for elastic-plastic solids*, in *Progress in Solid Mechanics*, vol. 1, Sneddon, I.N. e Hill, R., Eds., North-Holland, 165-221.
- Kupfer, H., Hilsdorf, H.K. e Rusch, H. (1969). *Behavior of concrete under biaxial stresses*. *ACI Journal*, **66**(8), 656-666.
- Jenike, A. e Shield, R. (1959). *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*. *J. Appl. Mech.*, **26**, 599-.
- Lade, P.V. e Duncan, J. M. (1973). *Cubical triaxial tests on cohesionless soil*. *J. Soil Mech. Found. Div. ASCE*, **SM10**, 793-812.
- Lade, P. V. e Duncan, J. M. (1975). *Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil*. *J. Geot. Eng. Div. ASCE*, **GT10**, 1037-1053.
- Lemonds, J. e Needleman, A. (1986 a). *Finite element analyses of shear localization in rate and temperature dependent solids*. *Mech. Materials*, 339-361.
- Lemonds, J. e Needleman, A. (1986 b). *An analysis of shear band development incorporating heat conduction*. *Mech. Materials*, 363-373.
- Lemonds, J., Asaro, R.J. e Needleman, A. (1985). *A numerical study of localized deformation in bi-crystals*. *Mech. Materials*, **4**, 417-435.
- Leroy, Y., Needleman, A. e Ortiz, M. (1989). *An overview of finite element methods for the analysis of strain localization*, in *Cracking and Damage*, Mazars, J. e Bazant, Z.P., Eds., Elsevier, London 269-294.
- Lippmann, H. (1986). *Velocity field equations and strain localization*. *Int. J. Solids Structures*, **22**(12), 1399-1409.
- Lippmann, H. (1989). *Velocity field equations and strain localization in rigid-plastic materials*. *Int. J. Solids Structures*, **22**(12), 1399-1409.
- Liu, T.C.Y., Nilson, A.H. e Slate, F.O. (1972). *Stress-strain response and fracture of concrete in uniaxial and biaxial compression*. *ACI Journal*, **69**(5), 291-295.
- Lo Bianco, M. e Mazzarella, C. (1984). *Tecniche di delimitazione del carico di collasso delle strutture murarie*. VII Congr. AIMETA, Trieste, 2-5 ottobre.
- Loret, B. (1987). *Non-linearite incrementale el localisation des deformations: quelques remarques*. *J. de Mec. Theor. et Appl.*, **6**(3), 423-459.
- Loret, B. (1990). *An introduction to the classical theory of elastoplasticity*. in *Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling*, Darve, F., Ed., Elsevier, Amsterdam, 149-186.

- Loret, B. e Prevost, J.H. (1986). *Accurate numerical solutions for Drucker-Prager elastic-plastic models*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **54**, 259.
- Loret, B. e Prevost, J.H. (1990). *Dynamic strain localization in elasto-(visco)-plastic solids, part. I and part. II*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **83**, 247-273.
- Loret, B., Prevost, J.H. e Hariereche, O. (1990). *Loss of hyperbolicity in elastic-plastic solids with deviatoric associativity*. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **9**(3), 225-231.
- Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. Macmillan, New York.
- Lucchesi, M. e Podio-Guidugli (1988). *Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part. I*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **102**, 23-43.
- Lucchesi, M. e Podio-Guidugli (1990). *Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part. II*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **110**, 9-42.
- Maier, G. (1970). *A minimum principle for incremental elastoplasticity with non-associated flow laws*. *J. Mech. Phys. Solids*, **18**, 319-330.
- Maier, G. e Hueckel, T. (1979). *Non associated and coupled flow-rules of elastoplasticity for rock-like materials*. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, **16**, 77-92.
- Malvern, L.E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New York.
- Mandel, J. (1966). *Conditions de stabilite et postulat de Drucker*. Kravtchenko, J. e Sirieys, P.M., Eds., *Rheology and soil mechanics*, Springer, Berlin, 58-68.
- Mandel, J. (1972). *Director vectors and constitutive equations for plastic and visco-plastic media*, in *Problems of Plasticity*, Sawczuk, A., Ed., Noordhoff, Leyden, 1974, 135-143.
- Marciniak, A. e Kuczynski, K. (1967). *Limit strains in the process of stretch forming sheet metal*, *Int. J. Mech. Sci.*, **9**, 609-620.
- Martin, J.B. (1975). *Plasticity: fundamentals and general results*, MIT Press, Cambridge, Mass.
- McClintock, F.A. e Argon, A.S. (1966). *Mechanical behavior of materials*. Addison-Wesley, Reading.
- Mear, M.E. e Hutchinson, J.W. (1985). *Influence of yield surface curvature on flow localization in dilatant plasticity*. *Mech. Materials*, **4**, 395-407.
- Melan, E. (1938). *Zur Plastizität des räumliche Kontinuums*. *Ingenieur Archiv*, **9**, 116-126.
- Merkle, J. G. (1970). *An ellipsoidal yield function for materials that can be both dilate and compact inelastically*. *Nucl. Engng. Design*, **12**(3), 425-451.

- Mróz, Z. (1963). *Non-associated flow laws in plasticity*. Journal de Mecanique. II, 21-42.
- Mróz, Z. (1966). *On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids*. Arch. Mech. Stosowanej, 18(1), 3-35.
- Mróz, Z. (1985). *Current problems and new directions in mechanics of geomaterials*, in Mechanics of geomaterials, Bazant, Z.P., Ed., Wiley & Sons, Chichester, 539-566.
- Mróz, Z. e Norris, V.A. (1982). *Elastoplastic and viscoplastic constitutive models for soils with application to cyclic loading*, in Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, Pande, G.N. e Zienkiewicz, O.C., Eds., Wiley & Sons, Chichester, 173-217.
- Murray, D.W., Chitnuyanondh, L. Rijub-Agha, K.J. e Wong, C. (1979). *A concrete plasticity theory for biaxial stress analysis*. J. Eng. Mech. Div. ASCE, 105(EM6), 989-1106.
- Nacar, A., Needleman, A. e Ortiz, M. (1989). *A finite element method for analyzing localization in rate dependent solids at finite strains*. Computer Meth. Appl. Mech. Engrg. 73, 235-258.
- Nadai, A. (1931). *Plasticity*. McGraw-Hill, New York.
- Nadai, A. (1950). *Theory of flow and fracture of solids*. McGraw-Hill, New York.
- Neale, K.W. (1981) *Phenomenological constitutive laws in finite plasticity*, SM Archives 6, 79-128.
- Needleman, A. (1976). *Necking of pressurized spherical membranes*. J. Mech. Phys. Solids, 24, 339-359.
- Needleman, A. (1979). *Non-normality and bifurcation in plane strain tension or compression*. J. Mech. Phys. Solids, 27, 231-254.
- Needleman, A. (1989). *Dynamic shear band development in plane strain*. J. Appl. Mech., 56, 1-9.
- Needleman, A. e Rice, J.R. (1978). *Limits to ductility set by plastic flow localization*. Koistinien, D.P. e Wang, N.M., eds., *Mechanics of sheet metal forming*, Plenum Press, New York, 237-267.
- Needleman, A. e Tvergaard, V. (1983). *Finite element analysis of localization in plasticity*, Finite Elements-Special Problems in Soild Mechanics 5, Oden, J.T. e Carey, G.F., Eds., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 95-157.
- Nemat-Nasser, S. (1982). *On dynamic and static behavior of granular materials*, in Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, Pande, G.N. e Zienkiewicz, O.C., Eds., Wiley & Sons, Chichester, 439-458.
- Nemat-Nasser, S. (1983). *On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials*. Trans ASME, 50, 1114-1126.

- Nemat-Nasser, S. e Shokooh, A. (1980). *On finite plastic flows of compressible materials with internal friction*. Int. J. Solids Structures, **16**, 495-514.
- Nikolaevskii, V.N. e Rice, J.R. (1979). *Current topics in non-elastic deformation of geological materials*, in High Pressure Science and Technology, Plenum, New York, 455-464.
- Nova, R. (1985). *An engineering approach to shear band formation in geological media*, in International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya.
- Nova, R. (1987). *A short note on shear bands as characteristics*. Meccanica, **22**(1), 43-45.
- Nova, R. (1989). *Liquefaction, stability bifurcations of soil via strainhardening plasticity*, presented at the 2nd Int. Workshop on Numerical Methods for Localization and Bifurcation of Granular Bodies, Gdansk, sept. 1989.
- Ogden, R.W. (1984). *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood, Chichester.
- Olszak, W., Mróz, Z. e Perzyna, P. (1963). *Recent trends in the development of the theory of plasticity*. Pergamon, Oxford.
- Ortiz, M. (1985). *A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete*. Mech. Materials, **4**, 67-93.
- Ortiz, M. (1987). *An analytical study of the localized failure modes of concrete*. Mech. Materials, **6**, 159-174.
- Ortiz, M. (1989). *Extraction of constitutive data from specimens undergoing strain localization*. J. Eng. Mech., ASCE, **115**(8), 1748-1760.
- Ortiz, M., Leroy, Y. e Needelman, A. (1987). *A finite element method for localized failure analysis*. Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg., **61**, 189-214.
- Ortiz, M. e Popov, E.P. (1982 a). *Plain concrete as a composite material*. Mech. Materials **1**, 139.
- Ortiz, M. e Popov, E.P. (1982 b). *A physical model for the inelasticity of concrete*. Proc. Roy Soc. Lond., A **383**, 101.
- Ortiz, M. e Quigley, J.J. (1989). *Element design and adaptive meshing in strain localization problems*, in Computational Plasticity, Owen, D.R.J., Hinton, E. e Oñate, E., Eds., Barcellona, Pneridge, Swansea, U.K., 213-236.
- Ottosen, N. S. (1977). *A failure criterion for concrete*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, **EM4**, 527-535.
- Palaniswamy, R. e Shah, S.P. (1974). *Fracture and stress-strain relationship of concrete under triaxial compression*. J. Struct. Eng., ASCE, **ST5**, **100**, 901-916.
- Palmer, A.C. (1966). *A limit theorem for materials with non-associated flow laws*. J. de Mecanique, **V**(2), 217-222.

- Palmer, A.C. e Rice, J.R. (1973). *The growth of slip surfaces in the progressive failure of over-consolidated clay*. Proc. Roy. Soc. Lond., A. **332**, 527-548.
- Pastor, M., Peraire, J. e Zienkiewicz, O.C. (1991). *Adaptive remeshing for shear band localization problems*. Ingenieur-Archiv, in printing.
- Pearce, J. A. (1972). in Stress-strain behaviour of soils, Parry, R.C.H., Ed., 330-339.
- Pearson, P.E. (1956). *General theory of elastic stability*. Quart. Appl. Math. **14**, 133-144.
- Perzyna, P. (1990). *Instability phenomena in thermodynamic flow processes*, in Progress in computational analysis of inelastic structures, CISM Course, Udine, oct. 1990.
- Pietruszczak, S.T., Jiang, J. e Mirza, F.A. (1988). *An elastoplastic constitutive model for concrete*. Int. J. Solids Structures, **24**(7), 705-722.
- Pietruszczak, S.T. e Mróz, Z. (1981). *Finite element analysis of deformation of strain softening materials*. Int. J. Numer. Meths. Engrg., **17**, 327-334.
- Prager, W. (1949). *Recent developments in the mathematical theory of plasticity*. J. Appl. Phys. **20**(3), 235-241.
- Prager, W. (1954). *Discontinuous fields of plastic stress and flow*, 2nd Nat. Congr. Appl. Mech., Ann Arbor, Michigan, 21-32.
- Prevost, J.H. (1984). *Localization of deformations in elastic-plastic solids*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **8**, 187-196.
- Prevost, J.H. (1987). *Modeling the behaviour of geomaterials*, Lecture Notes, Lousanne, August 1987.
- Prevost, J.H. e Höeg, K. (1975). *Effective stress-strain-strength model for soils*. J. Geotech. Engrg. Div., ASCE, **101**(GT3), 259-278.
- Prevost, J.H. e Hughes, T.J.R. (1980). *Finite element solution of boundary value problems*, in Int. Symp. Soils under Cyclic and Transient Loading, Pande, G.N. e Zienkiewicz, O.C., Eds., Balkema, Rotterdam, 263-276.
- Prevost, J.H. e Hughes, T.J.R. (1981). *Finite-element solution of elastic-plastic boundary-value problems*. J. Appl. Mech., **48**, 69-74.
- Radenkovich, D. (1961). *Theories des charges limites, extension a la mecanique des sols*. Seminars de plasticite, Ec. Polytech. Pubbl. Sc. et Tech. Minist. Air. n.N.T. 116.

- Raniecki, B. (1979). *Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations*, Bull. Acad. Polon. Sci. ser. sci. tech., **XXVII** (8-9), 391-399.
- Raniecki, B. e Bruhns, O.T. (1981). *Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain*. J. Mech. Phys. Solids, **29**, 153-171.
- Ryzhak, E. I. (1987). *Necessity of Hadamard conditions for stability of elastic-plastic solids*. Izv. AN SSSR MTT (Mechanics of Solids), 99-102.
- Rice, J. R. (1973). *The initiation and growth of shear bands*, in Plasticity in Soil Mechanics.
- Rice, J. R. (1976). *The localization of plastic deformation*. Theoretical and applied Mechanics, Koiter W. T., Ed., North-Holland, 207-220.
- Rice, J. R. (1985). *Shear localization, faulting, and frictional slip: Discussor's report*. Mechanics of geomaterials, Bazant, Z.P., Ed., Wiley & Sons, Chichester, 211-216.
- Rice, J.R. e Rudnicki, J.W. (1980). *A note on some features of the theory of localization of deformation*. Int. J. Solids Structures, **16**, 597-605.
- Rivlin, R.S. e Ericksen, J.L. (1955). *Stress-deformation relations for isotropic materials*. J. Rational Mech. Anal. **4**, 323-425.
- Roscoe, K.H. (1970). *The influence of strains in soil mechanics*. Geotechnique, **20**, 129-170.
- Roscoe, K.H. e Burland J. (1968). *On generalized stress-strain behaviour of wet clay*, in Haymann, J. e Leckie, F.A.A., Eds. Engineering Plasticity, Cambridge University Press, 535-609.
- Rowe, P.W. (1962). *The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact*. Proc. Royal Soc., **A**, **269**, 500-527.
- Rudnicki, J.W. e Rice, J.R. (1975). *Conditions for the localization of deformations in pressure-sensitive dilatant materials*. J. Mech. Phys. Solids, **23**, 371-394.
- Rudnicki, J.W. (1977). *The inception of faulting in a rock mass with a weakened zone*. J. Geophys. Res., **82**(5), 844.
- Runesson, K. e Mróz, Z. (1989). *A note on nonassociated plastic flow rules*. Int. J. Plasticity, **5**, 639-658.
- Sacchi, G. e Save, M. (1968). *A note on the limit loads of non-standard materials*. Meccanica, **3**(1), 43-45.
- Saje, M., Pan, J. e Needleman, A. (1982). *Void nucleation effects on shear localization in porous plastic solids*. Int. J. Fracture, **19**, 163-182.

- Salençon, J. (1972). *Écoulement plastique libre et analyse limite pour les matériaux standards et non standards*. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n. 152, 90-100.
- Salençon, J. (1977). *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*, Wiley & Sons, Chichester.
- Salençon, J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- Schaeffer, D. G. (1988). *Instability and ill-posedness in the deformation of granular materials*. To appear.
- Schaeffer, D. G., Shearer M. e Pitman, E. B. (1988). *Instability in critical state theories of granular flow*. To appear.
- Schaeffer, D. G., Shearer M. (1990) *Loss of hyperbolicity in yield vertex plasticity models under nonproportional loading*. To appear.
- Schofield, A.N. e Wroth, C.P. (1968). *Critical state soil mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Shah, S.P. e Chandra, S. (1968). *Critical stress volume change and microcracking of concrete*. ACI Journal, 65(9), 770-781.
- Shield, R.T. (1955). *On Coulomb's law of failure in soils*. J. Mech. Phys. Solids, 4(1), pp. 10-16.
- Simo, (1990). J.C. *Finite element formulation for elasto-plastic solids*, in Progress in computational analysis of inelastic structures, CISM Course, Udine, oct. 1990.
- Stören, S. e Rice, J.R. (1975). *Localized necking in thin sheets*. J. Mech. Phys. Solids, 23, 421-441.
- Tatsuji, M.E., Slate, F.O. e Nilson, A.H. (1978). *Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading*. ACI Journal, 75(7), 306-312.
- Thomas, T.Y. (1953). *The effect of compressibility on the inclination of plastic slip bands in flat bars*. Proc. Nat. Acad. Sci., 39, 266-273.
- Thomas, T.Y. (1954). *A discussion of the load drop and related matters associated with the formation of a Luders band*, Proc. Nat. Acad. Sci., 40, 572-576.
- Thomas, T.Y. (1961 a). *Concepts from tensor analysis and differential geometry*. Academic Press, New York.
- Thomas, T.Y. (1961 b). *Plastic flows and fracture of solids*, Academic Press, New York.
- Torrenti, J.M. (1986). *Some remarks upon concrete softening*. Matériaux et Constructions, 19(113), 391-393.
- Torrenti, J.M. (1987). *Comportement multiaxial du béton: aspects expérimentaux et modélisation*. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Ph. D. Thesis.

- Torrenti, J.M., Benaija, E.H. (1990). *Stereophotogrammetry: a new way to study strain localization in concrete under compression*, presented at the 9th International Conference on Experimental Mechanics, Lyngby, Copenhagen, aug. 1990.
- Torrenti, J.M., Benaija, E.H., Salhi, J.L. e Delahousse, H. (1989). *Stereophotogrammetrie - application au beton*. Rapports des Laboratoires, serie: Mechanique et mathematique appliquees, MA-3.
- Torrenti, J.M., Desrues, J., Benaija, E.H. e Boulay, C. (1990). *La stereophotogrammetrie: un moyen de visualiser la localisation des deformations dans le beton en compression*. Revue Francaise de Mecanique **1**, 53-57.
- Torrenti, J.M., Desrues, J., Acker, P. e Boulay, C. (1989). *Application of stereophotogrammetry to the strain localization in concrete compression*, in Cracking and Damage, Mazars, J e Bazant, Z.P., Eds., Elsevier, London 30-41.
- Torrenti, J.M., Desrues, J. e Benaija, E.H. (1989). *The application of stereophotogrammetry to strain localization in concrete*, presented at the 1989 Spring Conference on Experimental Mechanics, Cambridge, Massachussets, USA.
- Triantafyllidis, N. e Aifantis, E.C. (1986). *A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials*. J. Elasticity, **16**, 225-237.
- Triantafyllidis, N., Needleman, A. e Tvergaard, V. (1982). *On the development of shear bands in pure bending*. Int. J. Solids Structures, **18**(2), 121-138.
- Truesdell, C. e Noll, W. (1965). *The non-linear field theories of mechanics*, in "Encyclopedia of Physics", III/3 (Ed. Flügge), Springer-Verlag, Berlin.
- Tvergaard, V. (1981). *Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions*. Int. J. Fracture, **17**(4), 389-407.
- Tvergaard, V., Needleman, A. e Lo, K.K. (1981). *Flow localization in the plane strain tension test*. J. Mech. Phys. Solids, **29**(2), 115-142.
- van Hove, L. (1947). *Sur l' extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux integrales multiples à plusieurs fonctions inconnues*. Proc. Sect. Sci. K. Akad. van Wetenschappen Amsterdam, **50** (68b), 18-23.
- van Mier, J.G.M. (1984). *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*. De Technische Hogeschool Eindhoven, Ph. D. Thesis.
- Vardoulakis, I. (1976). *Equilibrium theory of shear bands in plastic bodies*. Mech. Res. Comm., **3**(3), 209-214.

- Vardoulakis, I. (1980). *Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial test*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **4**, 103-109.
- Vardoulakis, I. (1981). *Bifurcation analysis of the plane rectilinear deformation on dry sand samples*. Int. J. Solids Structures, **11**, 1085-1101.
- Vardoulakis, I. (1988). *Theoretical and experimental bounds for shear-band bifurcation strain in biaxial tests on dry sand*. Res Mechanica, **23**, 239-259.
- Vardoulakis, I. (1989). *Bifurcation analysis in geomechanics*. Lecture notes, short course held at the University of Bologna, Italy, oct. 1989.
- Vardoulakis, I., Goldscheider, M. e Gudehus, G. (1978). *Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., **2**, 99-128.
- Villaggio, P. (1968). *Stability conditions for elastic-plastic Prandtl-Reuss solids*. Meccanica, **3**(1), 46-47.
- Wang, C.C. (1969 a). *On representation for isotropic functions, Part. I*. Arch. Rat. Mech. Anal., **33**, 249-267.
- Wang, C.C. (1969 b). *On representation for isotropic functions, Part. II*. Arch. Rat. Mech. Anal., **33**, 268-287.
- Wang, C.C. (1970 a). *A new representation theorem for isotropic functions: an answer to professor Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions, Part. I*. Arch. Rat. Mech. Anal., **36**, 166-197.
- Wang, C.C. (1970 b). *A new representation theorem for isotropic functions: an answer to professor Smith's criticism of my papers on representations for isotropic functions, Part. II*. Arch. Rat. Mech. Anal., **36**, 198-223.
- Wang, C.C. (1971). *Corrigendum to my recent papers on "representations for isotropic functions"*. Arch. Rat. Mech. Anal., **43**, 392-395.
- Wawersik, W.R. e Fairhurst, C. (1970). *A study of brittle rock fracture in laboratory compression experiments*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci., **7**, 561-575.
- Wawersik, W.R., Rudnicki, J.W., Olsson, W.A., Holcomb, D.J. e Chau, K.T. (1990). *Localization of deformation in brittle rock: theoretical and laboratory investigation*, in Micromechanics of Failure of Quasi-Brittle Materials, Shah, S.P., Swalz e Wang, Eds., Elsevier, Amsterdam, 115-124.
- Willam, K.J. e Warnke, E.P. (1975). *Constitutive model for the triaxial behavior of concrete*, Seminar on Concrete Structure Subjected to Triaxial Stresses, Paper III-1, IABSE Proc. **19** Bergamo.

---

Zaccaria, D. (1989). *Stabilità e analisi biforcata dei sistemi elastici ed elasto-plastici con applicazioni alle travi di parete sottile aperta*. Dottorato di Ricerca in Meccanica delle Strutture, Università di Bologna, Ph. D. Thesis.

## APPENDICE A.1

Prova di compressione monoassiale su un campione prismatico di conglomerato cementizio. Per gentile concessione del Laboratoire Central des Ponts et Chaussees (Parigi), settembre 1990.

La prova è stata condotta su un campione prismatico di dimensioni 12 cm x 6 cm x 2 cm di conglomerato cementizio con inerte di dimensione massima pari a 4 mm. Le condizioni di prova corrispondono a rotazioni libere in testa al campione e attrito nullo tra le facce del campione ed i piatti della pressa. I risultati che vengono presentati sono stati solo parzialmente pubblicati e costituiscono una parte della tesi di dottorato dell' Ing. Benaija (1991).

Nella Figure sono rappresentati il diagramma forza-spostamento (Fig. A.1.1), le rotazioni in testa al campione riferite ai diversi istanti di prova (Fig. A.1.2), gli spostamenti rilevati in corrispondenza delle riprese fotogrammetriche (Fig. A.1.3), le mappe degli isovalori degli spostamenti orizzontali (Fig. A.1.4) e verticali (Fig. A.1.5), le dilatazioni superficiali (i rettangoli indicano zone di dilatanza) (Fig. A.1.6) e gli scorrimenti superficiali (i rettangoli indicano le zone soggette a deformazione tagliante) (Fig. A.1.7).

Nelle figure è chiaramente visibile lo sviluppo di due bande di taglio disposte ad "X" ed inclinate di circa  $26^\circ$  rispetto all' asse della compressione. Il valore dello sforzo di picco nella curva A.1 è di 40.77 KN, la rotazione della testa del campione è iniziata per un accorciamento del campione pari a 1.34 volte quello corrispondente al picco. D' altra parte la localizzazione è stata osservata appena prima del picco (tra le riprese 4 e 5 in fig. A.1). Confrontando le Figg. A.1 ed A.2, si nota che l' inclinazione del ramo di softening aumenta all' aumentare della rotazione in testa al campione.

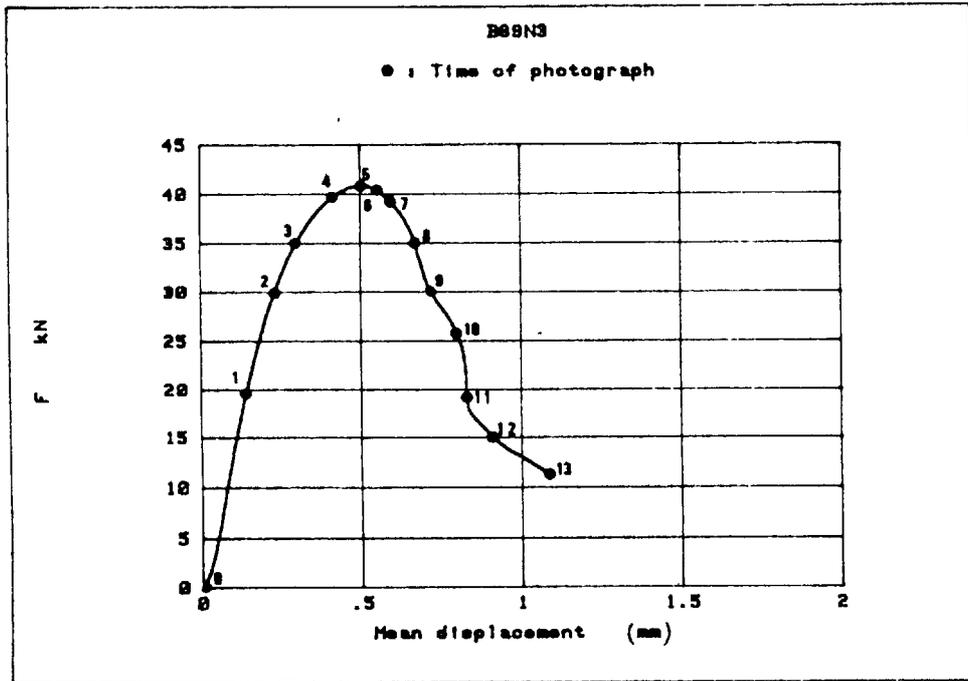


FIG. A.1.1 - PROVA DI COMPRESSIONE MONOASSIALE  
 CAMPIONE PRISMATICO DI CONGLOMERATO CEMENTIZIO.  
 CURVA CARICO - SPOSTAMENTO  
 (PER GENTILE CONCESSIONE DELL' LCPC DI PARIGI)

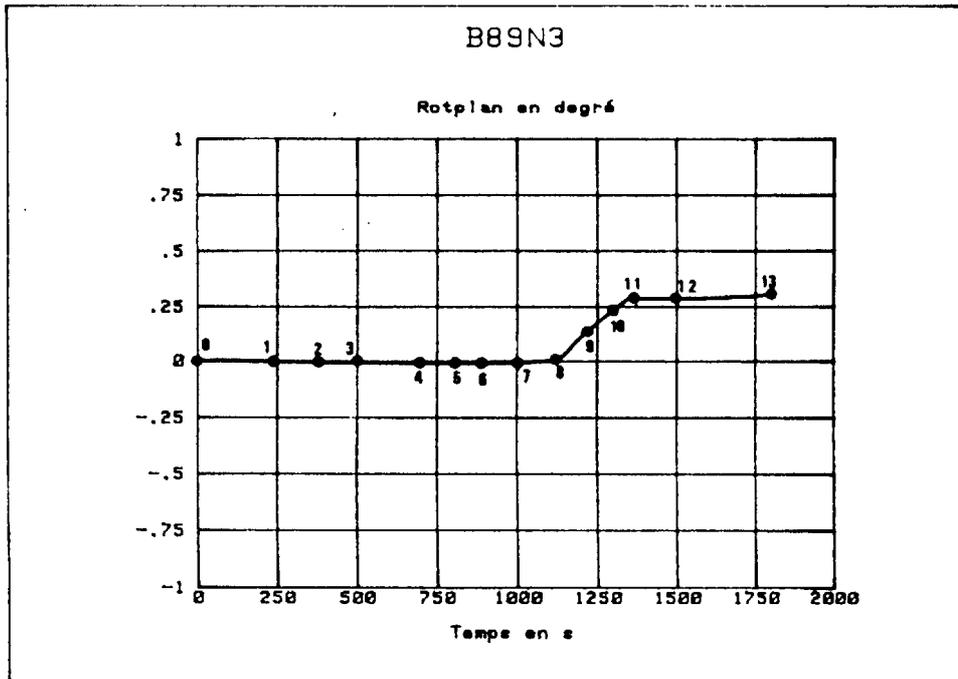
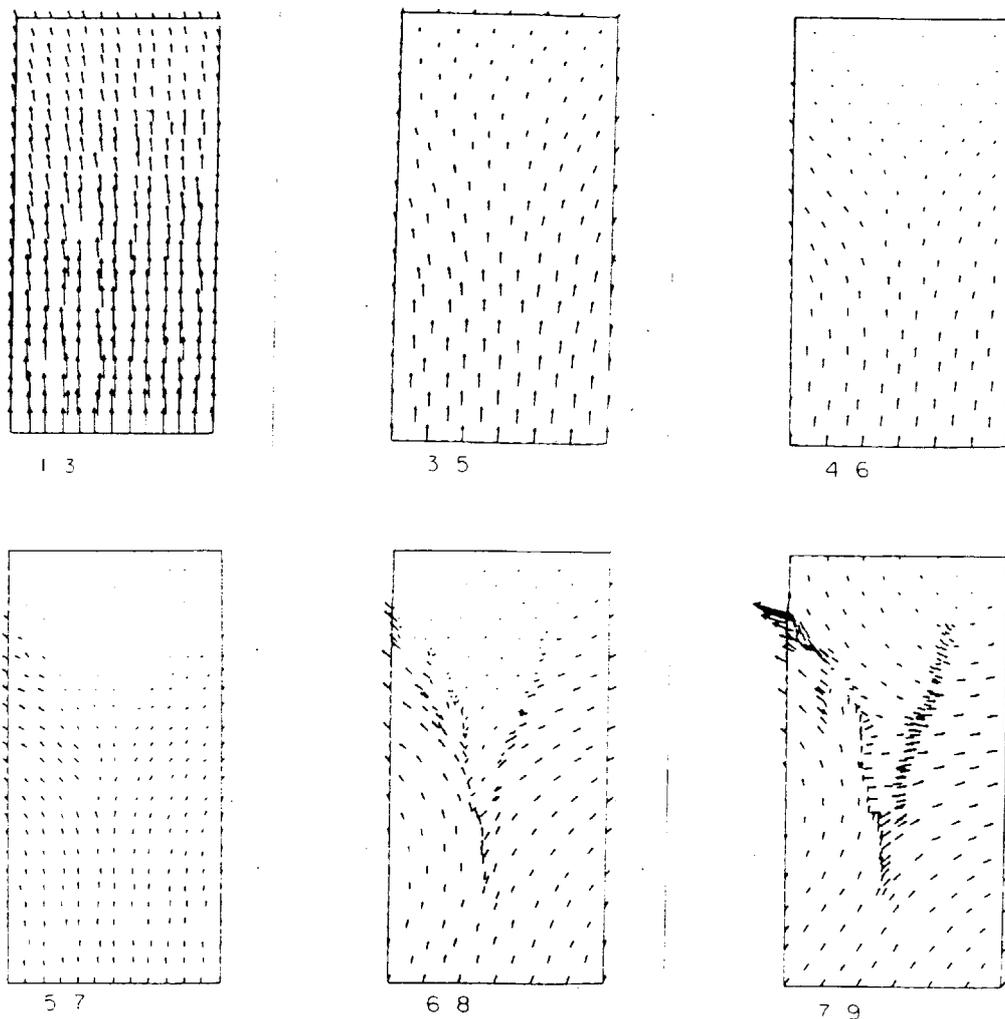
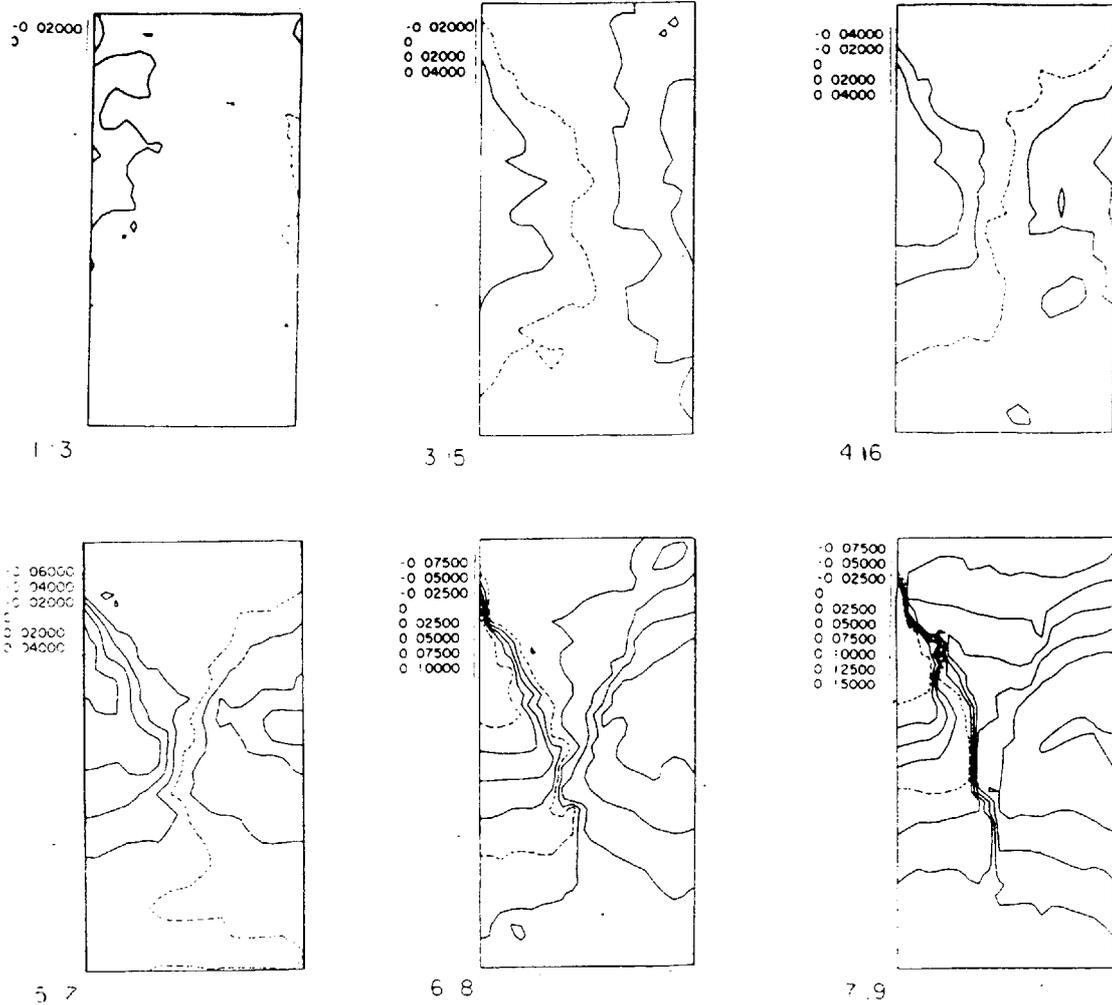


FIG. A.1.2 - PROVA DI COMPRESSIONE MONOASSIALE  
CAMPIONE PRISMATICO DI CONGLOMERATO CEMENTIZIO.  
ROTAZIONI IN TESTA AL CAMPIONE ALLE DIVERSE  
RIPRESE STEREOFOTOGRAMMETRICHE  
(PER GENTILE CONCESSIONE DELL' LCPC DI PARIGI)



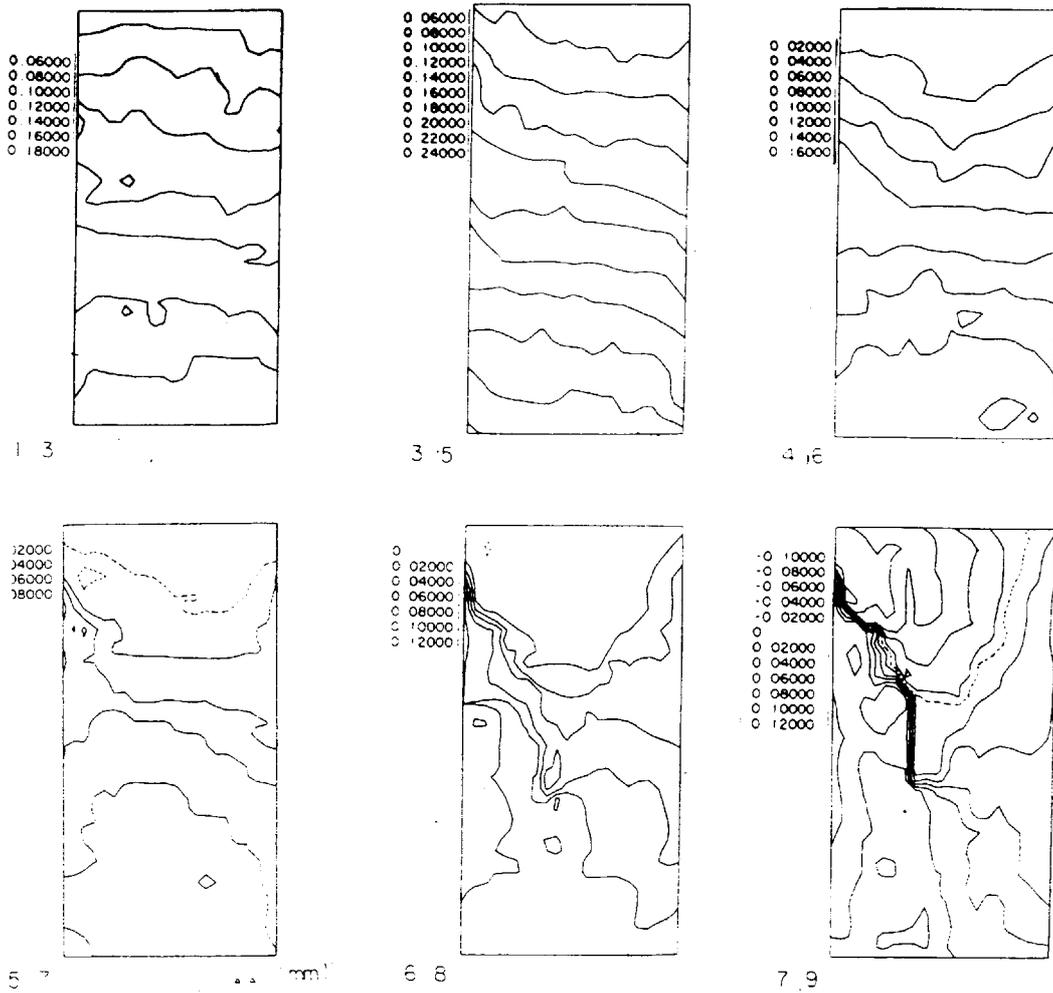
vecteurs déplacements (essai n3)

FIG. A.1.3 - PROVA DI COMPRESSIONE MONOASSIALE  
 CAMPIONE PRISMATICO DI CONGLOMERATO CEMENTIZIO.  
 SPOSTAMENTI DEL CAMPIONE ALLE DIVERSE  
 RIPRESE STEREOFOTOGAMMETRICHE  
 (PER GENTILE CONCESSIONE DELL' LCPC DI PARIGI)



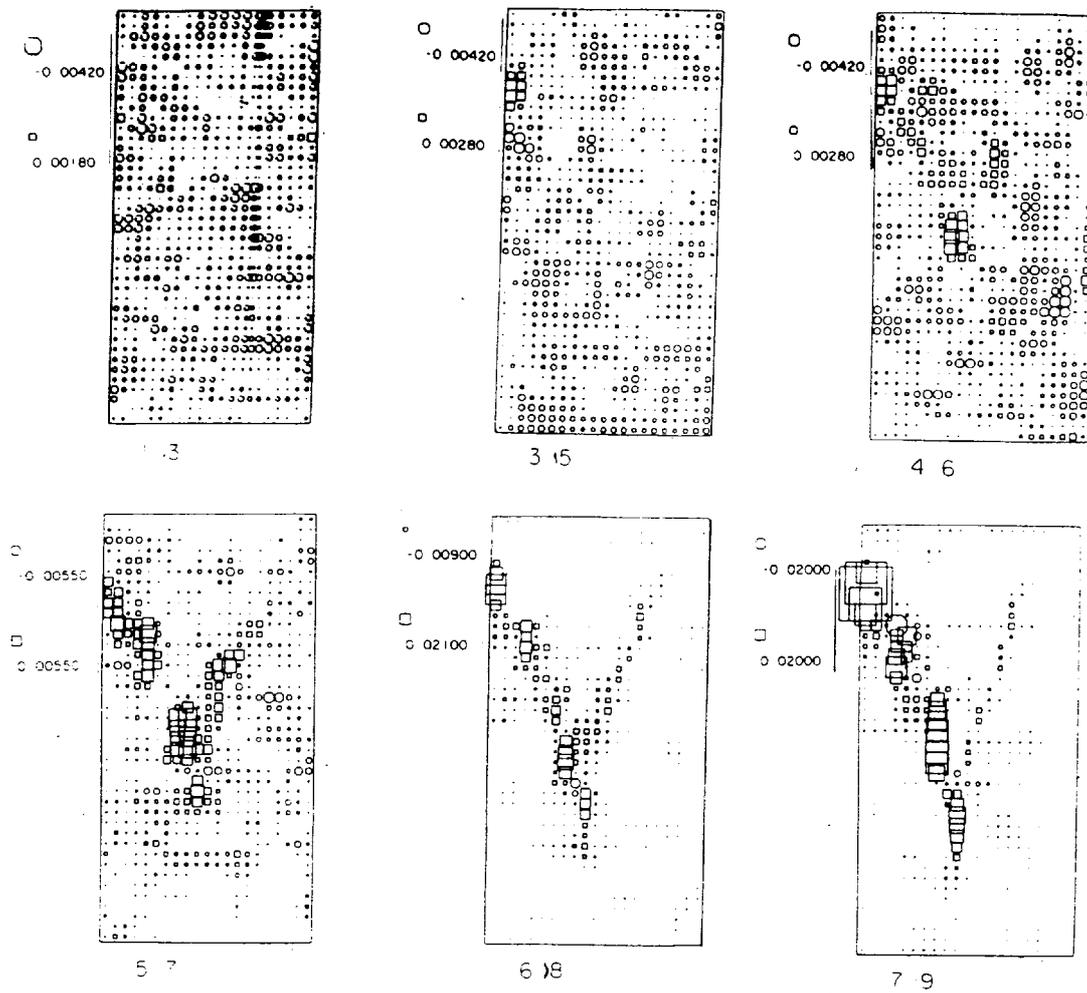
isovaleurs de déplacement horizontales  
(essai n3)

FIG. A.1.4 - PROVA DI COMPRESSIONE MONOASSIALE  
CAMPIONE PRISMATICO DI CONGLOMERATO CEMENTIZIO.  
ISOVALORI DEGLI SPOSTAMENTI ORIZZONTALI TRA  
LE DIVERSE RIPRESE STEREOFOTOGAMMETRICHE  
(PER GENTILE CONCESSIONE DELL' LCPC DI PARIGI)



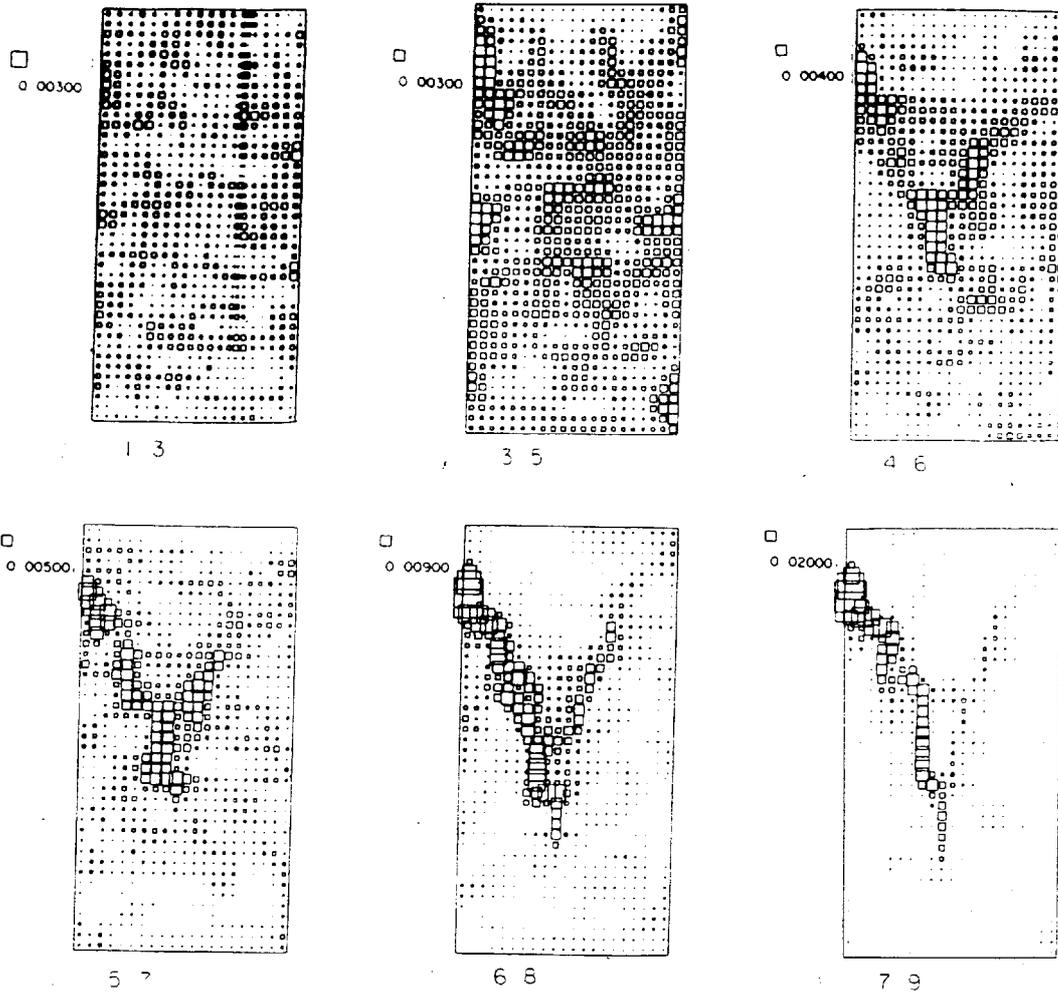
isovaluers de déplacement verticales  
(essai n3)

FIG. A.1.5 - PROVA DI COMPRESSIONE MONOASSIALE  
CAMPIONE PRISMATICO DI CONGLOMERATO CEMENTIZIO.  
ISOVALORI DEGLI SPOSTAMENTI VERTICALI TRA  
LE DIVERSE RIPRESE STEREOFOTOGAMMETRICHE  
(PER GENTILE CONCESSIONE DELL' LCPC DI PARIGI)



variation de surface (essai n3)

FIG. A.1.6 - PROVA DI COMPRESIONE MONOASSIALE  
 CAMPIONE PRISMATICO DI CONGLOMERATO CEMENTIZIO.  
 DILATAZIONI SUPERFICIALI TRA LE DIVERSE RIPRESE  
 - I RETTANGOLI INDICANO ZONE DI DILATANZA -  
 (PER GENTILE CONCESSIONE DELL' LCPC DI PARIGI)

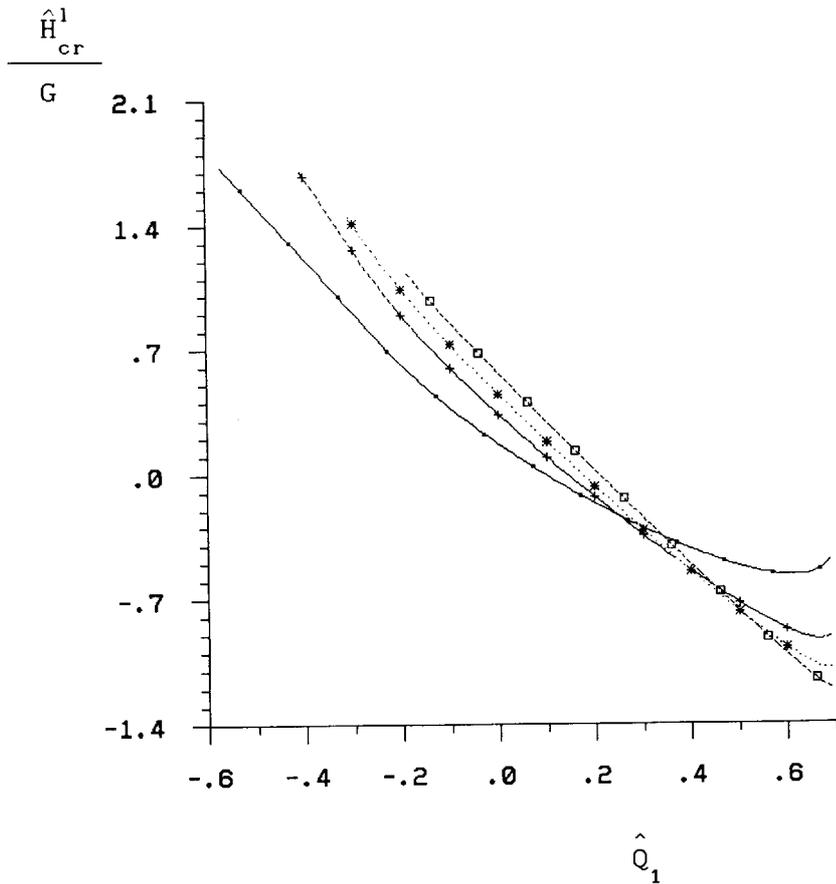


cartes de distorsion (essai n3)

FIG. A.1.7 - PROVA DI COMPRESSIONE MONOASSIALE  
 CAMPIONE PRISMATICO DI CONGLOMERATO CEMENTIZIO.  
 DILATAZIONI SUPERFICIALI TRA LE DIVERSE RIPRESE  
 I RETTANGOLI INDICANO ZONE SOGGETTE A  
 DEFORMAZIONE TAGLIANTE  
 (PER GENTILE CONCESSIONE DELL' LCPC DI PARIGI)

## APPENDICE A.2

Andamento del modulo di incrudimento critico per la localizzazione (normalizzato rispetto a  $G$ ) in funzione di  $\hat{Q}_1$ , per diversi valori di  $\hat{P}_3$ , per  $\nu = 0.3$  (Fig. A.2.1 a) e per  $\nu = 0.45$  (Fig. A.2.2 a). In funzione degli stessi parametri, è riportata anche l'inclinazione (in gradi) della normale alla banda rispetto all'asse della compressione (Fig. A.2.1 b, per  $\nu = 0.3$  e Fig. A.2.2 b, per  $\nu = 0.45$ ).



—  $\hat{P}_3 = -0.8164$       ···· \*  $\hat{P}_3 = -0.45$   
 - - +  $\hat{P}_3 = -0.60$       - · - □  $\hat{P}_3 = -0.30$

$\hat{H}_{cr}^1$  = modulo di incrudimento  
critico per la  
localizzazione

$\mathbf{n}$  = normale alla banda

$\nu = 0.3$

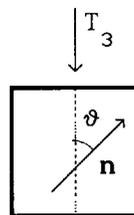
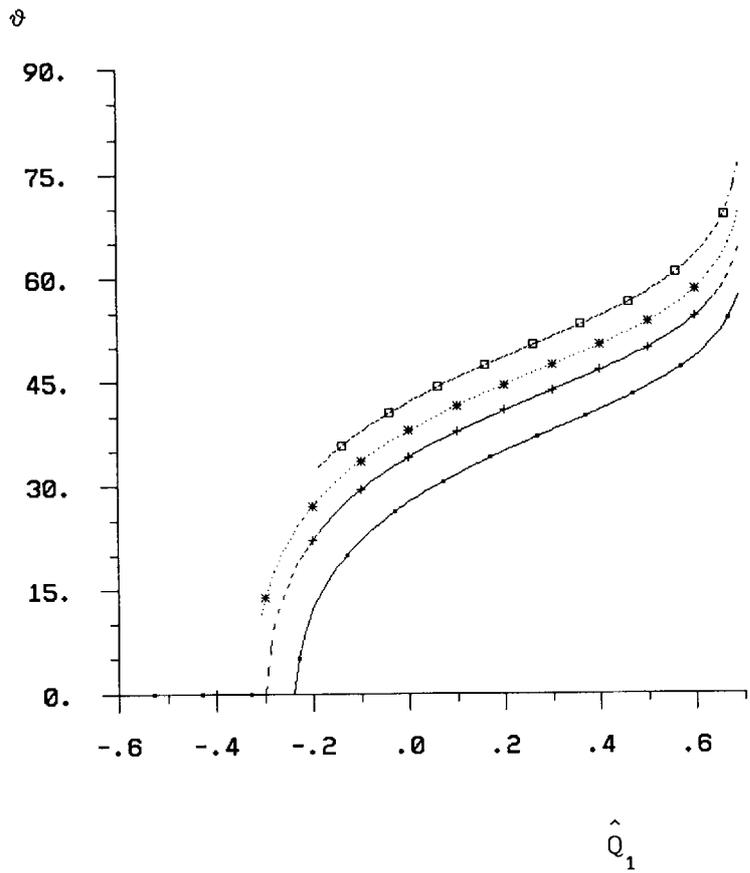


FIG. A.2.1-A



—•—  $\hat{P}_3 = -0.8164$       ..... \*  $\hat{P}_3 = -0.45$   
 - - +  $\hat{P}_3 = -0.60$       - · - □  $\hat{P}_3 = -0.30$

$\vartheta$  = inclinazione della banda  
 $\mathbf{n}$  = normale alla banda  
 $\nu = 0.3$

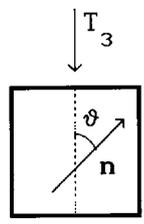
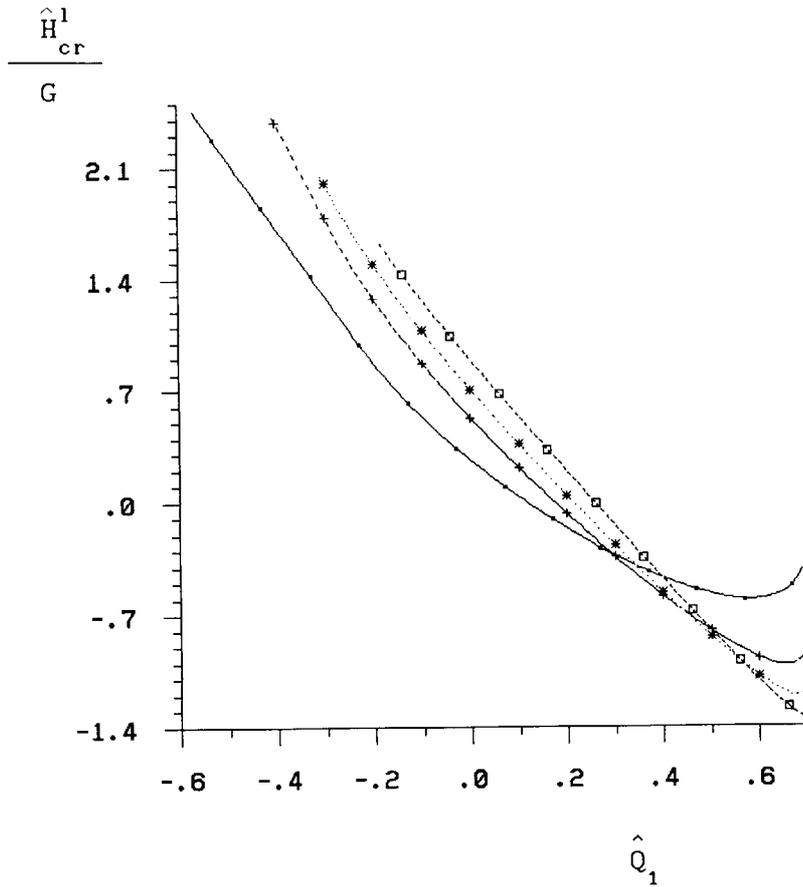


FIG. A.2.1-B



—  $\hat{P}_3 = -0.8164$       ···· \*  $\hat{P}_3 = -0.45$   
 - - +  $\hat{P}_3 = -0.60$       - - □  $\hat{P}_3 = -0.30$

$\hat{H}_{cr}^1$  = modulo di incrudimento  
critico per la  
localizzazione

$\mathbf{n}$  = normale alla banda

$\nu = 0.45$

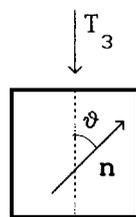
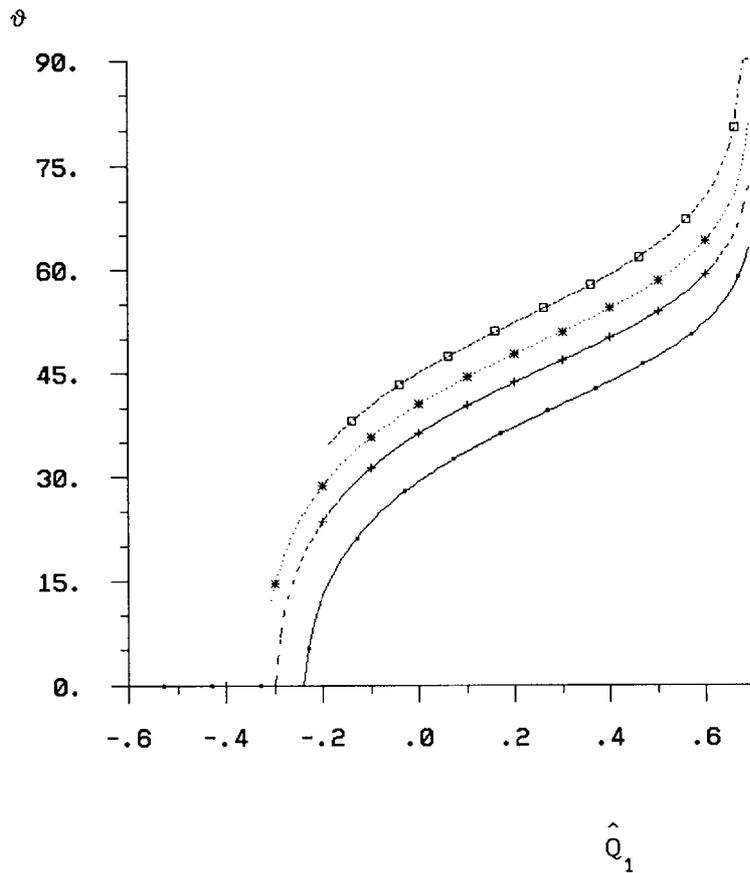


FIG. A.2.2-A



—  $\hat{P}_3 = -0.8164$       ···· \*  $\hat{P}_3 = -0.45$   
 - - +  $\hat{P}_3 = -0.60$       - · - □  $\hat{P}_3 = -0.30$

$\vartheta$  = inclinazione della banda  
 $\mathbf{n}$  = normale alla banda  
 $\nu = 0.45$

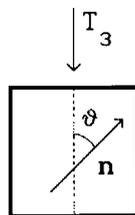


FIG. A.2.2-B